

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Транспортная логистика

Электронные методические указания и рекомендации
по проведению практических занятий

САМАРА

2012

УДК 347.763
ББК 65.37

Составители: **Титов Борис Александрович,**
Кольцов Иван Владимирович

Транспортная логистика [Электронный ресурс] : электрон. метод. указания и рекомендации по проведению практ. занятий / Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); сост. Б. А. Титов, И. В. Кольцов. - Электрон. текстовые и граф. дан. (1,8 Мбайт). - Самара, 2012. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Рассмотрены задачи по построению и исследованию графдиаграмм, на определение кратчайшего маршрута, показано решение задач транспортной логистики с использованием средства "Поиск решения" пакета MS Excel. Рассмотрена задача о коммивояжёре, показано решение задачи транспортной логистики методом “северо-западного угла”, приведены варианты заданий по задаче транспортной логистики. Показано решение задачи управления запасами с применением ABC- и XYZ-анализа.

Учебное пособие предназначено для подготовки бакалавров факультета инженеров воздушного транспорта по направлению 190700.62 «Технология транспортных процессов» (Федеральный Государственный образовательный стандарт третьего поколения - ФГОС-3) при изучении дисциплины «Транспортная логистика» в 6 семестре.

Также оно может быть использовано для подготовки бакалавров факультета заочного обучения по направлению 190700.62 «Технология транспортных процессов» (Федеральный Государственный образовательный стандарт третьего поколения - ФГОС-3) при изучении дисциплины «Транспортная логистика» в 3 семестре.

Может быть полезно молодым специалистам в области транспортной логистики и экономики.

Подготовлено на кафедре организации и управления перевозками на транспорте СГАУ.

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
1. Задачи по построению и исследованию графдиаграмм	5
2. Задачи на определение кратчайшего маршрута	9
3. Решение задач транспортной логистики с использованием средства "Поиск решения" пакета MS Excel.....	15
4. Задача о коммивояжёре.....	23
5. Решение задачи транспортной логистики методом “северо- западного угла”.....	35
6. Варианты заданий по задаче транспортной логистики.....	43
7. Управление запасами с применением ABC- и XYZ- анализа.	49
8. Распределение парка воздушных судов авиакомпаний на заданной сети авиалиний.....	61
9. Список литературы	71

Предисловие

Сборник задач содержит задачи по основным разделам транспортной логистики. Задачи сгруппированы в шесть тем: теория графов, определение кратчайших расстояний на дорожной сети, решение основной транспортной логистической задачи посредством "Поиска решения" пакета MS Excel, решение задачи о коммивояжёре, решение транспортной логистической задачи методом "северо-западного угла" и варианты заданий по транспортной логистической задаче.

Разделы 3, 4 и 5 рассмотрены более подробно с разбором конкретных задач.

Задачник предназначен студентам, обучающимся по очной и дистанционной формам обучения, но может быть также полезен и студентам заочного бакалавриата, обучающимся по направлению 190700.62 – "Технология транспортных процессов".

1. ЗАДАЧИ ПО ПОСТРОЕНИЮ И ИССЛЕДОВАНИЮ ГРАФДИАГРАММ

Задача 1.1 Построить граф по заданному аналитическому выражению:

а) $G = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 5),$

$(4, 1), (4, 2), (4, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\})$;

б) $G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{(1, 2), (1, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\})$;

в) $G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{(1, 2), (2, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 3), (4, 3), (3, 1)\})$.

Задача 1.2 Дать аналитическое описание графа (рисунки 1-6):

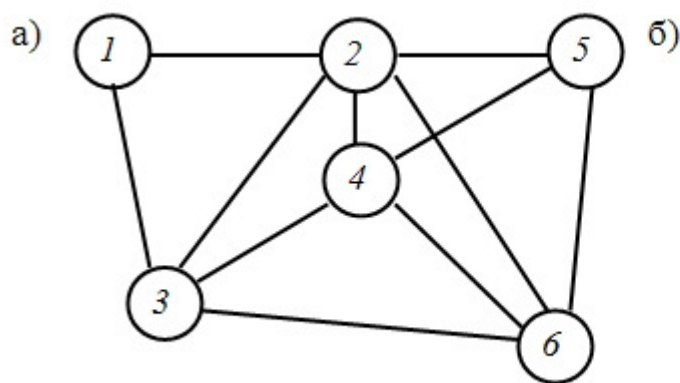


Рисунок 1 – Вариант 1

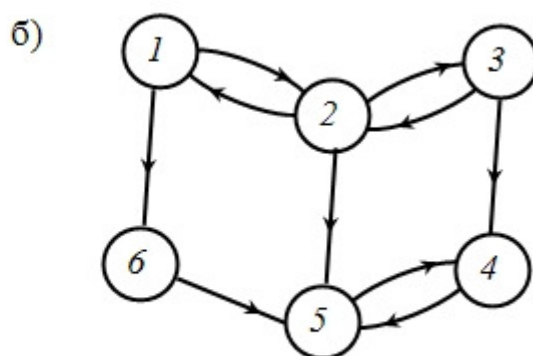


Рисунок 2 – Вариант 2

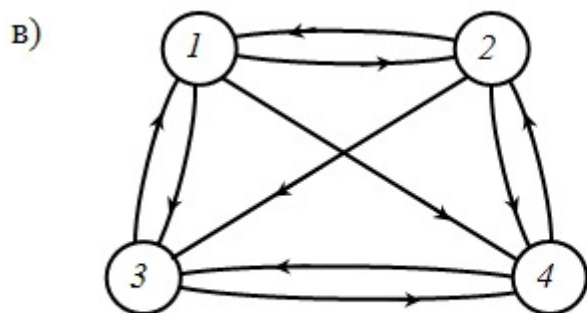


Рисунок 3 – Вариант 3

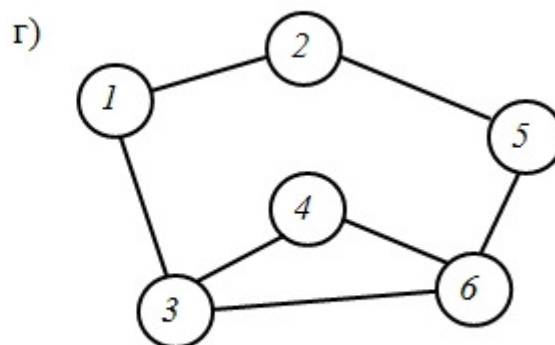


Рисунок 4 – Вариант 4

д)

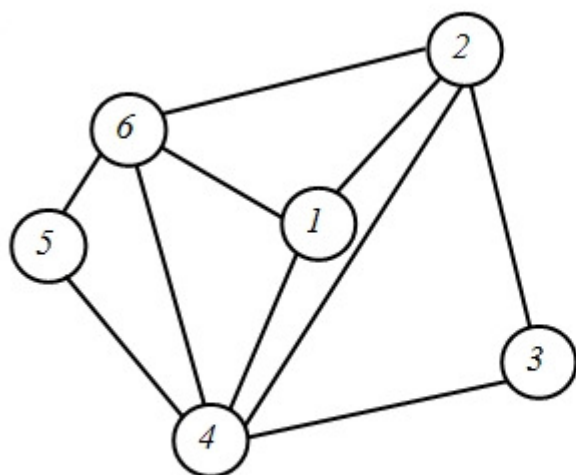


Рисунок 5 – Вариант 5

е)

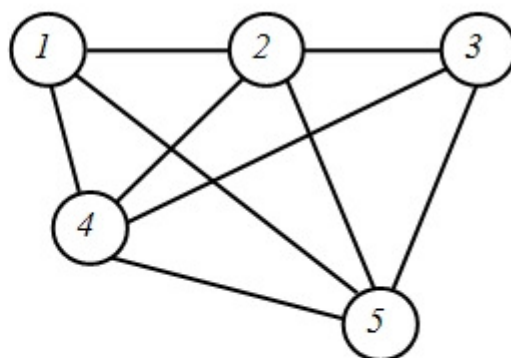


Рисунок 6 – Вариант 6

Задача 1.3 Построить матрицу примыканий для неориентированного графа (Рисунки 7-9):

а)

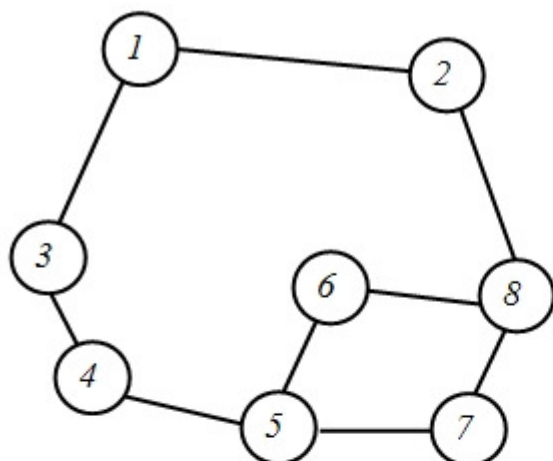


Рисунок 9 – Вариант 1

б)

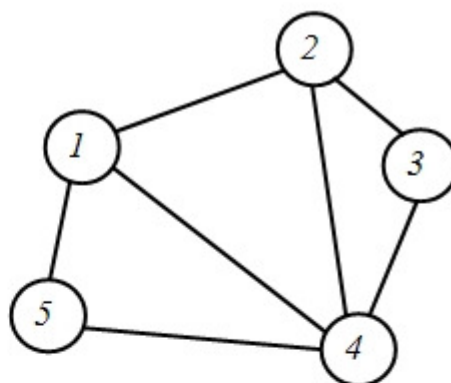


Рисунок 10 – Вариант 2

в)

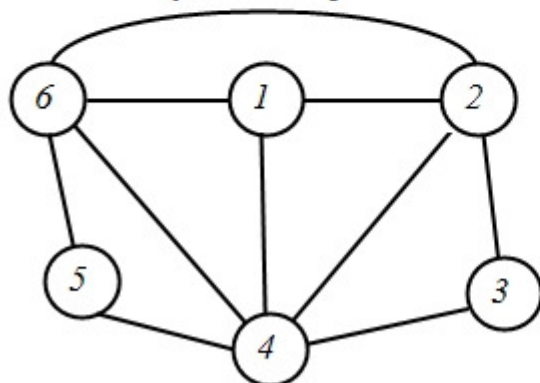


Рисунок 11 – Вариант 3

Задача 1.4 Построить матрицу примыканий для ориентированного графа (Рисунки 12-15):

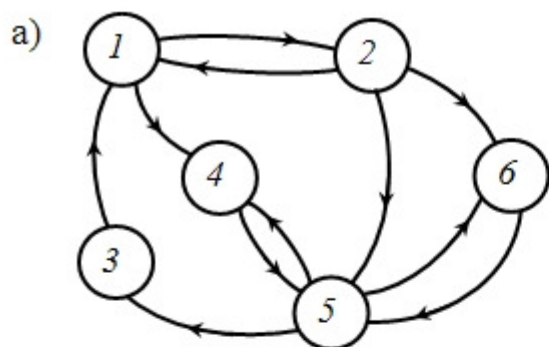


Рисунок 12 – Вариант 1

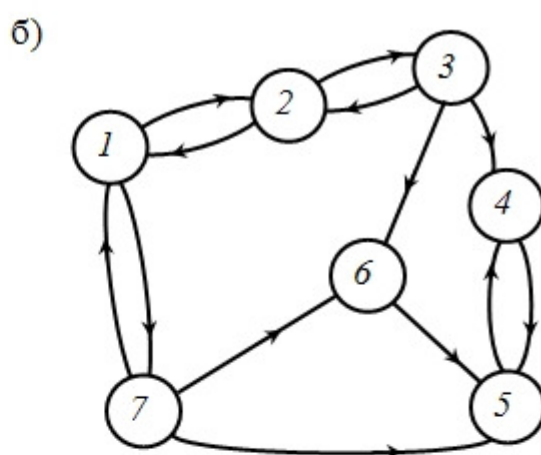


Рисунок 13 – Вариант 2

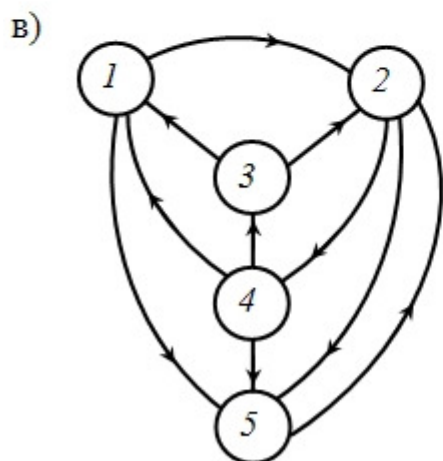


Рисунок 14 – Вариант 3

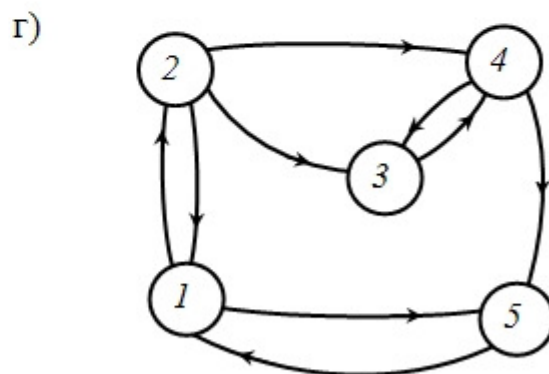


Рисунок 15 – Вариант 4

Задача 1.5 Построить матрицу примыканий для взвешенного графа (Рисунки 16-21):

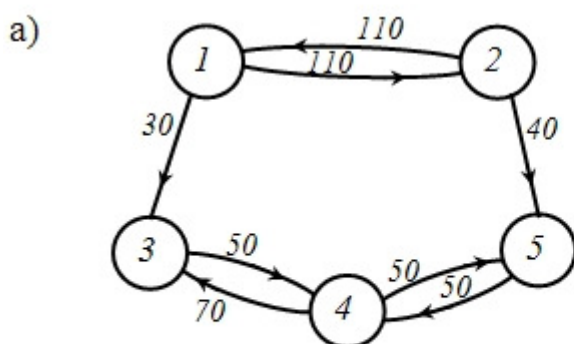


Рисунок 16 – Вариант 1

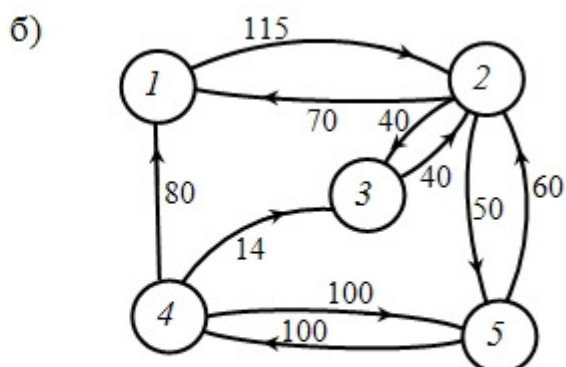


Рисунок 17 – Вариант 2

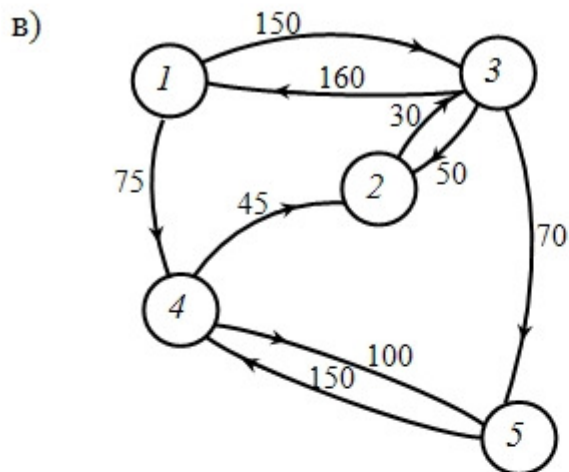


Рисунок 18 – Вариант 3

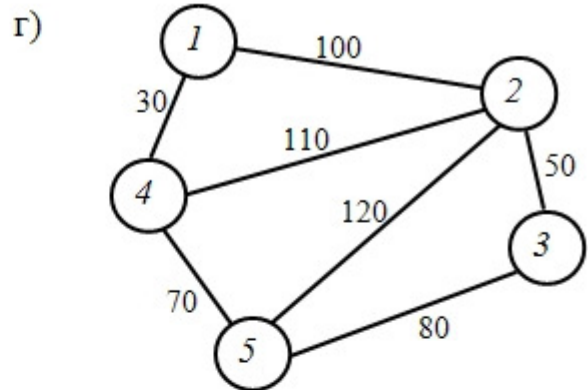


Рисунок 19 – Вариант 4

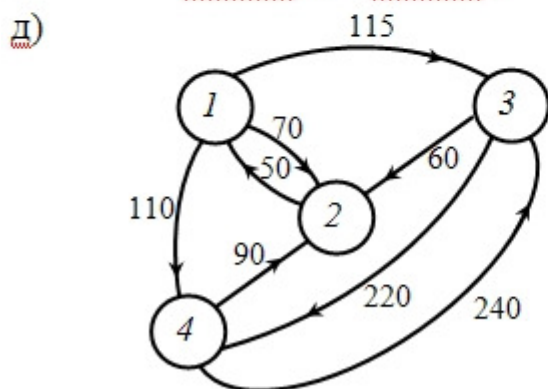


Рисунок 20 – Вариант 5

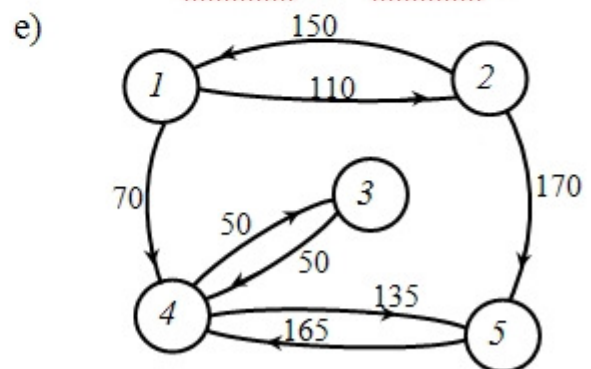


Рисунок 21 – Вариант 6

Задача 1.6 Составить список всех путей из вершины 1 в вершину 4 в следующем орграфе (Рисунок 22):

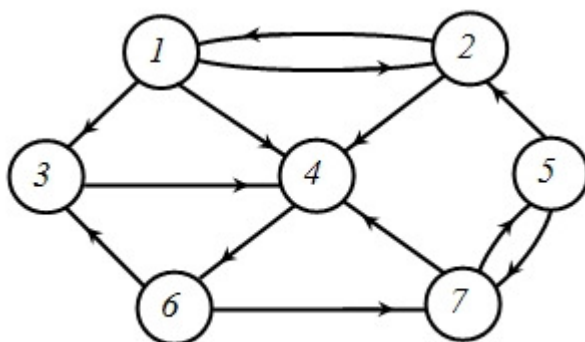


Рисунок 22 – Вариант 1

Задача 1.7 Составить список всех циклов с началом в вершине 7 в орграфе из задачи 1.6.

Задача 1.8 Составить список всех путей из вершины 1 в вершину 5 в следующем графе (Рисунок 23):

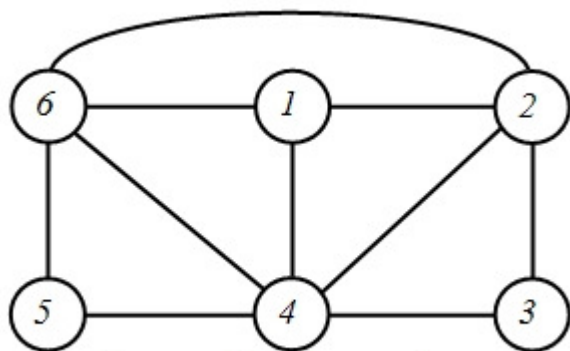


Рисунок 23 – Вариант 1

Задача 1.9 Составить список всех циклов с началом в вершине 3 в орграфе из задачи 1.8.

Задача 1.10 Составить список примыканий для следующих графов:

а) Задача 1.2, а), б), в), г), д), е);

б) Задача 1.3, а), б), в);

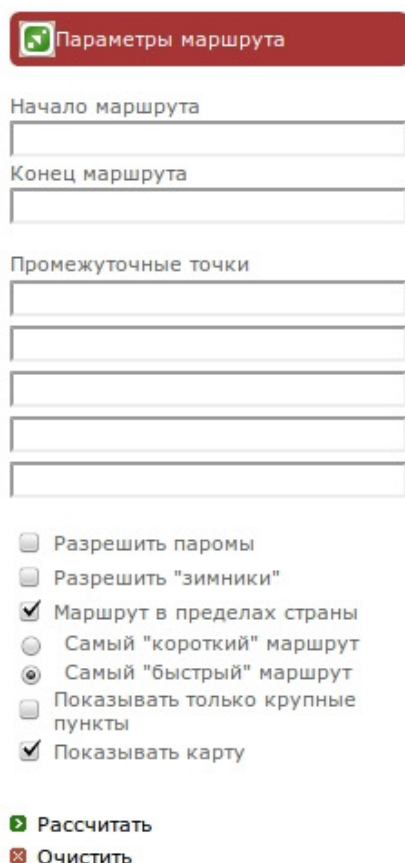
в) Задача 1.4, а), б), в), г).

2. ЗАДАЧИ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРАТЧАЙШЕГО МАРШРУТА

Эта группа задач выполняется с использованием интернет-сайта www.ati.su, представляющего собой информационную систему по грузоперевозкам в пределах Российской Федерации.

На главной странице находится гиперссылка "Расчет расстояний", которую необходимо активизировать.

Далее на появившейся странице слева задаются исходные данные для расчёта (рисунок 24).



Параметры маршрута

Начало маршрута

Конец маршрута

Промежуточные точки

☐ Разрешить паромы

☐ Разрешить "зимники"

☒ Маршрут в пределах страны

☐ Самый "короткий" маршрут

☒ Самый "быстрый" маршрут

☐ Показывать только крупные пункты

☒ Показывать карту

Рисунок 24 – Фрагмент окна ati.su для заполнения исходных данных

Исходные данные заполняются в соответствии с указаниями информационной системы:

Начало маршрута: Самара;

Конец маршрута: заданный конечный пункт;

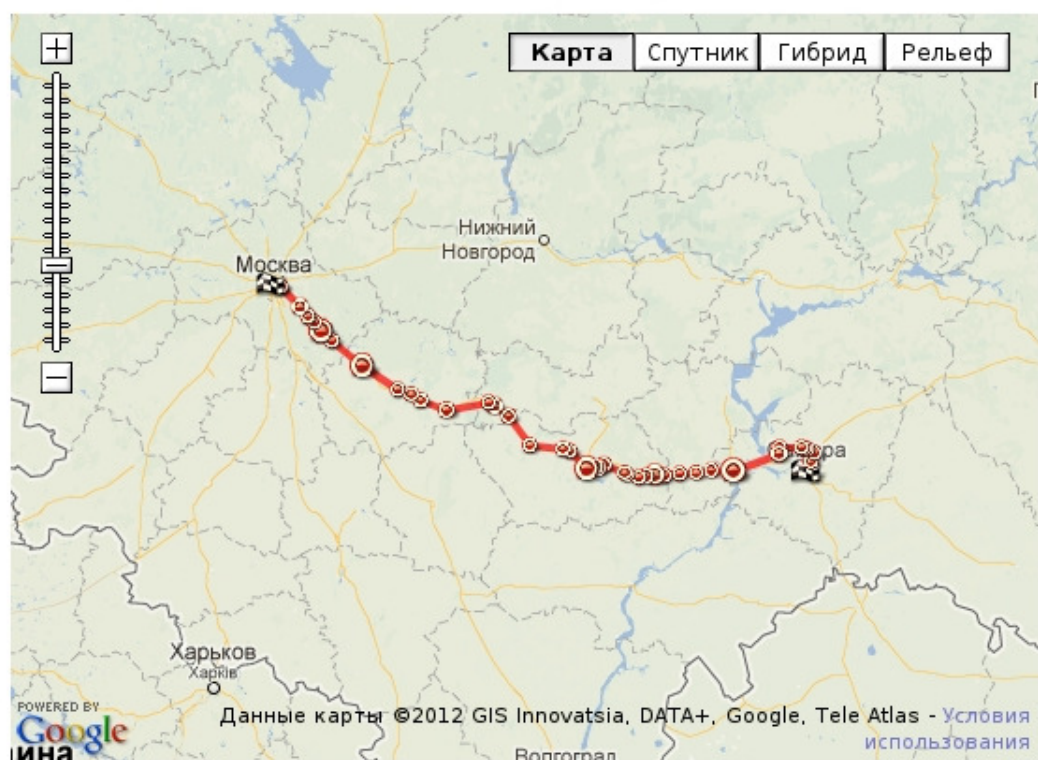
Промежуточные точки: заданные транзитные пункты.

После введения исходных данных необходимо нажать кнопку «Рассчитать», и на экране монитора появляется схематический путь (рисунок 25).

В верхнем правом углу web-страницы имеется ссылка "Версия для печати". После активизации этой ссылки принтер печатает рассчитанный маршрут "Самара - транзитный пункт - конечный пункт" маршрута.

Маршрут отражается следующей информацией:

1. Пункт маршрута. Трасса с указанием типа магистрали или дороги.



Расстояние: **1049 км.**

Время в пути: **22:22**

[Версия для печати](#)

Пункт маршрута	Трасса	Расст. от начала	Время в пути	Длина участка	Время участка	Доп. инфо.
Самара		0 км	00:00			Россия
				10 км	00:55	
<input type="checkbox"/> Пос. Мехзавода		10 км	00:55	16 км	00:14	
<input type="checkbox"/> М5 х (Самара)	М 5	26 км	01:09	12 км	00:10	
<input type="checkbox"/> М5 х Р178	М 5	38 км	01:20	5 км	00:04	
<input type="checkbox"/> М5 х (Береза)	М 5	43 км	01:24	5 км	00:04	
<input type="checkbox"/> М5 х (Курумоч)	М 5	48 км	01:28	35 км	00:30	
<input type="checkbox"/> М5 х (Обводная до...)	М 5	83 км	01:58	14 км	00:17	
<input type="checkbox"/> Жигулевск		97 км	02:15			

Рисунок 25 – Схематический маршрут Самара – Москва через Пензу



Рисунок 25 – Схематический маршрут Самара – Москва через Пензу




<input type="checkbox"/> Плес		473 км	10:35		
				59 км	00:56
<input type="checkbox"/> Нижний Ломов		532 км	11:31		
				58 км	00:55
<input type="checkbox"/> Спасск		590 км	12:25		
				27 км	00:31
<i>Республика Мордовия</i>					
<input type="checkbox"/> Зубова Поляна		617 км	12:56		
				13 км	00:19
<input type="checkbox"/> Умет		630 км	13:15		
				73 км	01:10
<i>Рязанская область</i>					
<input type="checkbox"/> Шацк		703 км	14:25		
				42 км	00:44
<input type="checkbox"/> Путятино		745 км	15:08		
				20 км	00:22
<input type="checkbox"/> Авдотьянка		765 км	15:30		
				28 км	00:29
<input type="checkbox"/> Заполье		793 км	15:59		
				77 км	01:39
<input type="checkbox"/> Рязань		870 км	17:38		
				58 км	01:22
<i>Московская область</i>					
<input type="checkbox"/> Луховицы		928 км	19:00		
				19 км	00:34
<input type="checkbox"/> Коломна		947 км	19:34		
				19 км	00:34
<input type="checkbox"/> Непецино		966 км	20:08		
				10 км	00:11
<input type="checkbox"/> А108 (4)		976 км	20:19		
				3 км	00:05
<input type="checkbox"/> Никитское		979 км	20:24		
				18 км	00:23

Рисунок 25 – Схематический маршрут Самара – Москва через Пензу

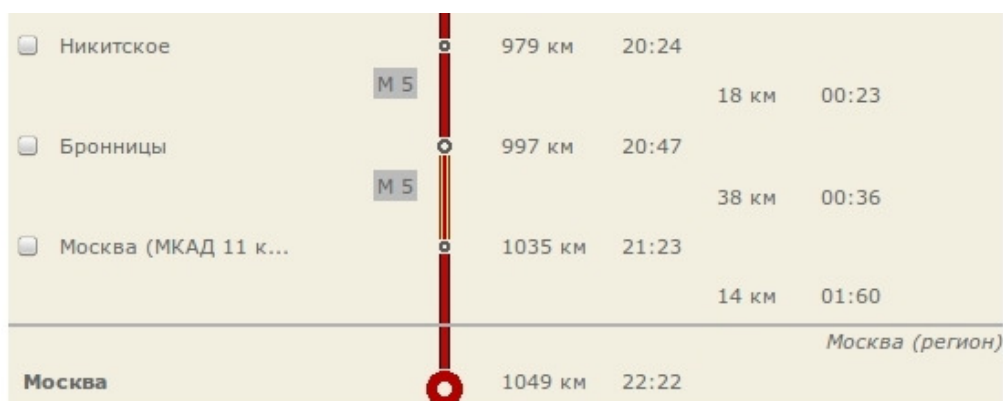


Рисунок 25 – Схематический маршрут Самара – Москва через Пензу

2. Расстояние от начала в км.
3. Время в пути - часы: минуты - начальное и конечное время проезда участка маршрута.
4. Длина участка маршрута в км.
5. Время проезда участка - часы: минуты.
6. Дополнительная информация - указывается регион РФ.

Методические указания для выполнения раздела 2

1. Задание для расчёта (три пункта движения – начальный, транзитный и конечный) выдается преподавателем.
2. Студенты самостоятельно получают листинг маршрута и делают расчёт скоростного режима движения автотранспорта по участкам маршрута.

Расчёт скоростного режима выполняется по соотношению (1):

$$V_{cp} = \frac{\Delta L}{\Delta t} \left[\frac{\text{км}}{\text{час}} \right], \quad (1)$$

где ΔL – длина участка (снимается с маршрутной схемы), км;

Δt – время прохождения участка, час.

Результат расчёта на листинге маршрута в крайнем правом столбце (доп. инфо).

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТРАНСПОРТНОЙ ЛОГИСТИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДСТВА "ПОИСК РЕШЕНИЯ" ПАКЕТА MS Excel

В качестве примера рассмотрим две задачи следующего содержания.

Задача 3.1

В 2 пункта доставляется 322 и 400 т однородного груза. При этом используется подвижной состав двух типов транспорта суммарным тоннажом 100, 120, 130, 180 и 200 т. Заданы стоимости доставки единицы груза каждым видом транспорта в каждый пункт (таблица 1):

Таблица 1 – Исходные данные

Виды транспорта	Пункты	
	60	72
	66	78
	78	108
	84	114
	144	126

Выбрать такое распределение тоннажа подвижного состава по пунктам, чтобы *все грузы были доставлены*, а общая *стоимость перевозки была минимальной*. Выписать целевую функцию и ограничения. Определить суммарную стоимость.

Решение

Переменные для описания задачи:

$I = 5$ – количество видов подвижного состава;

$J = 2$ – количество пунктов;

A_i – суммарный тоннаж подвижного состава i -го вида, т, $i = 1..5$;

B_j – заданный объем перевозок в j -й пункт, т, $j = 1..2$;

C_{ij} – стоимость доставки единицы груза подвижным составом i -го вида в j -й пункт, руб/т, $i = 1..5$, $j = 1..2$;

X_{ij} – объем перевозок подвижным составом i -го вида в j -й пункт, т, $i = 1..5$, $j = 1..2$.

Значения переменных A_i , B_j , L_{ij} заданы и входят в состав исходных данных; проектные переменные X_{ij} определяются в ходе решения задачи линейного программирования.

Целевая функция (суммарная стоимость перевозки) записывается следующим образом (2):

$$C = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^2 C_{ij} X_{ij} \rightarrow \min. \quad (2)$$

Суммарный тоннаж подвижного состава всех видов транспорта должен быть не меньше заданного объёма перевозок, поэтому необходимым условием решения данной задачи является следующее (3):

$$\sum_{i=1}^5 A_i \geq \sum_{j=1}^2 B_j. \quad (3)$$

Ограничения, накладываемые на задачу, формализуются в следующем виде:

1) суммарный объём груза, доставляемого подвижным составом всех видов в j -й пункт, должен быть равен заданному объёму перевозок в этот пункт (4):

$$\sum_{i=1}^5 X_{ij} = B_j, \quad j = 1..2; \quad (4)$$

2) суммарный объём груза, перевозимого во все пункты подвижным составом i -го вида, не должен быть больше имеющегося тоннажа подвижного состава этого вида (5):

$$\sum_{j=1}^2 X_{ij} \leq A_i, \quad i = 1..5. \quad (5)$$

Проверим выполнение необходимого условия (3) решения задачи: суммарный запас должен быть не меньше суммы заявок.

Суммарный запас груза (6):

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 200 + 220 + 240 + 260 = 920. \quad (6)$$

Сумма заявок (7):

$$B_1 + B_2 + B_3 = 200 + 300 + 400 = 900. \quad (7)$$

Условие (3) выполняется: суммарный запас груза превышает сумму заявок.

Целевая функция (2) записывается следующим образом (8):

$$\begin{aligned} C = & 15X_{11} + 12X_{12} + 14X_{13} + \\ & + 9X_{21} + 11X_{22} + 8X_{23} + \\ & + 12X_{31} + 10X_{32} + 10X_{33} + \\ & + 10X_{41} + 8X_{42} + 6X_{43} \rightarrow \min \end{aligned} \quad (8)$$

Ограничения (4) на объём перевозок в каждый пункт записывается следующим образом (9):

$$\begin{aligned} X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} &= 200; \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} &= 300; \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} &= 400. \end{aligned} \quad (9)$$

Ограничения (4) на общее количество груза, отправляемого от каждого терминала, записывается следующим образом (10):

$$\begin{aligned}
X_{11} + X_{12} + X_{13} &\leq 200; \\
X_{21} + X_{22} + X_{23} &\leq 220; \\
X_{31} + X_{32} + X_{33} &\leq 240; \\
X_{41} + X_{42} + X_{43} &\leq 260.
\end{aligned}
\tag{10}$$

Решение задачи целочисленного линейного программирования осуществляется с использованием средства "Поиск решения" пакета *MS Excel* методом "ветвей и границ".

Значение целевой функции составило 8080 т·км.

Значение переменных X_{ij} , полученные в результате решения задачи, приведены в таблице 2:

Таблица 2 – Результаты вычислений

$i \backslash j$	1	2	3	Всего
1	0	180	0	180
2	200	0	20	220
3	0	120	120	240
4	0	0	260	260
Всего	200	300	400	

В первый пункт груз доставляется со второго терминала (200 т), во второй пункт – с первого (180 т) и с третьего (120 т) терминалов, в третий пункт – со второго (20 т), третьего (120 т) и четвертого (260 т) терминалов.

Грузооборот определяется как произведение общей массы перевозимого груза на рассчитанный километраж пути, т·км.

Задача 3.2

В транспортном узле производится перевалка с одного вида транспорта на другой груза 5 типов массой 900, 750, 600, 450, 375 т. Перевалка возможна по 2 вариантам, максимальный вес груза, который может быть перевален 990 и 2200 т, соответственно. Стоимости перевалки 1 т каждого типа груза по каждому варианту приведены в таблице 3:

Таблица 3 – Стоимости перевалки

Грузы	Варианты	
	8	13
	11	17
	14	21
	17	29
	21	34

Выбрать такое распределение грузов по вариантам перевалки, чтобы *все грузы были перевалены*, а общая *стоимость работ была минимальной*. Выписать целевую функцию и ограничения. Определить суммарную стоимость.

Решение

Переменные для описания задачи:

$I = 5$ – количество типов груза;

$J = 2$ – количество вариантов перевалки груза;

A_i – вес груза i -го типа, т, $i = 1..5$;

B_j – максимальный вес груза, который может быть перевален по j -му варианту перевалки, т, $j = 1..2$;

C_{ij} – стоимость перевалки i -го типа по j -му варианту перевалки, руб/т, $i = 1..5$, $j = 1..2$;

X_{ij} – количество i -го типа груза, переваленного по j -му варианту перевалки, т, $i = 1..5$, $j = 1..2$.

Значения переменных A_i , B_j , L_{ij} заданы и входят в состав исходных данных; проектные переменные X_{ij} определяются в ходе решения задачи линейного программирования.

Целевая функция (суммарная стоимость перевалки) записывается следующим образом (11):

$$C = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^2 C_{ij} X_{ij} \rightarrow \min. \quad (11)$$

Суммарный максимальный вес груза, который может быть перевален, должен быть не менее груза, который должен быть перевален. *Необходимым условием решения* данной задачи является следующее (12):

$$\sum_{i=1}^5 A_i \leq \sum_{j=1}^2 B_j. \quad (12)$$

Ограничения, накладываемые на задачу, формализуются в следующем виде:

1) общее количество груза, переваливаемого по j -му варианту, не должно превышать максимального объёма груза, который может быть перевален по этому варианту (13):

$$\sum_{i=1}^5 X_{ij} \leq B_j, \quad j = 1..2; \quad (13)$$

2) общее количество переваливаемого груза i -го типа должно быть равно имеющемуся весу этого груза, т.е. весь груз должен быть перевален (14):

$$\sum_{j=1}^2 X_{ij} = A_i, \quad i = 1..5. \quad (14)$$

Сформулированная задача является многопараметрической задачей линейного программирования минимизации критерия (11) с учётом выполнения условия (12) и ограничений (13) и (14).

Проверим выполнение необходимого условия (12) решения задачи: суммарный вес переваливаемого груза должен быть не больше суммарного максимального веса перевалки.

Суммарный вес груза:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 900 + 750 + 600 + 450 + 375 = 3075.$$

Суммарный максимальный вес перевалки:

$$B_1 + B_2 = 990 + 2200 = 3190.$$

Условие (12) выполняется: суммарный вес переваливаемого груза не превышает суммарный максимальный вес перевалки.

Целевая функция (5) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} C = & 8X_{11} + 13X_{12} + \\ & + 11X_{21} + 17X_{22} + \\ & + 14X_{31} + 21X_{32} + \\ & + 17X_{41} + 29X_{42} + \\ & + 21X_{51} + 34X_{52} \rightarrow \min \end{aligned}$$

Ограничения (13) на общее количество груза, переваливаемого по каждому варианту перевалки, записывается следующим образом:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} \leq 990;$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} + X_{52} \leq 2200.$$

Ограничения (14) на объём перевалки каждого типа груза, записывается следующим образом:

$$X_{11} + X_{12} = 900;$$

$$X_{21} + X_{22} = 750;$$

$$X_{31} + X_{32} = 600;$$

$$X_{41} + X_{42} = 450;$$

$$X_{51} + X_{52} = 375.$$

Решение задачи целочисленного линейного программирования осуществляется с использованием средства "Поиск решения" пакета *MS Excel* методом "ветвей и границ".

Значение целевой функции составило 51420 руб.

Значение переменных X_{ij} , полученные в результате решения задачи, приведены в таблице 4:

Таблица 4 – Результаты вычислений

$i \backslash j$	1	2	Всего
1	0	900	900
2	0	750	750
3	165	435	600
4	450	0	450
5	375	0	375
Всего	200	300	

Первый тип груза переваливается по второму варианту (900 т), второй тип – по второму (750 т), третий тип – по первому (165 т), четвертый тип – по первому (450 т), пятый тип груза – по первому варианту (375 т).

Аналогично в этой задаче грузооборот определяется произведением массы перевозимого груза на километраж пути, т·км.

Ниже приводятся исходные данные для решения задач типа 3.1 и 3.2 самостоятельно (таблицы 5-14):

Таблица 5 – Вариант № 3.1.1

Терминалы	Пункты назначения		
	21	10	4
	13	15	18
	7	29	21
	14	8	3

$$A_i = \{250, 320, 710, 180\}$$

$$B_j = \{350, 610, 425\}$$

Таблица 6 – Вариант № 3.1.2

Терминалы	Пункты назначения		
	18	17	11
	29	31	19
	30	29	35
	14	9	4

$$A_i = \{185, 610, 275, 318\}$$

$$B_j = \{325, 470, 529\}$$

Таблица 7 – Вариант № 3.1.3

Терминалы	Пункты назначения		
	5	7	14
	11	19	29
	29	17	35
	4	21	10

$$A_i = \{355, 718, 148, 950\}$$

$$B_j = \{1100, 520, 400\}$$

Таблица 8 – Вариант № 3.1.4

Терминалы	Пункты назначения		
	9	14	5
	11	19	37
	21	38	29
	13	10	12

$$A_i = \{179, 211, 156, 242\}$$

$$B_j = \{288, 250, 240\}$$

Таблица 9 – Вариант № 3.2.1

Грузы	Варианты	
	10	12
	13	17
	15	22
	21	27
	29	35

$$A = \{950, 700, 650, 550, 275\}$$

$$B = \{970, 2500\}$$

Таблица 10 – Вариант № 3.2.2

Грузы	Варианты	
	12	14
	15	22
	17	24
	21	27
	30	36

$$A = \{870, 690, 670, 560, 370\}$$

$$B = \{830, 2900\}$$

Таблица 11 – Вариант № 3.2.3

Грузы	Варианты	
	13	11
	15	19
	19	23
	27	29
	34	37

$$A = \{750, 670, 720, 590, 340\}$$

$$B = \{1010, 3100\}$$

Таблица 12 – Вариант № 3.2.4

Грузы	Варианты	
	17	14
	21	19
	25	21
	31	27
	39	33

$$A = \{590, 710, 670, 720, 245\}$$

$$B = \{950, 2950\}$$

Таблица 13 – Вариант № 3.2.5

Грузы	Варианты	
	9	18
	13	21
	17	27
	21	35
	26	39

$$A = \{490, 370, 620, 810, 275\}$$

$$B = \{1010, 2910\}$$

Таблица 14 – Вариант № 3.2.6

Грузы	Варианты	
	18	14
	24	16
	29	18
	35	27
	39	31

$$A = \{720, 470, 560, 310, 375\}$$

$$B = \{970, 2810\}$$

4. ЗАДАЧА О КОММИВОЯЖЁРЕ

4.1 Постановка задачи

Рассмотрим постановку задачи о коммивояжёре (торговом представителе).

Имеется n пунктов. Задана матрица (C_{ij}) транспортных расстояний между этими пунктами, при этом каждый пункт соединён со всеми остальными. Выезжая из одного пункта, коммивояжёр должен побывать в других пунктах по одному разу и вернуться в исходный пункт. Поэтому маршрут коммивояжёра образует на дорожном графе замкнутый цикл без петель.

В каком порядке следует объезжать пункты, чтобы пройденное расстояние было минимальным?

Построим математическую модель задачи, введя булевы переменные:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если коммивояжёр из пункта } i \text{ переезжает в пункт } j, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $i, j = \overline{1, n}; i \neq j$.

Требуется минимизировать следующее выражение (15):

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (15)$$

при следующих ограничениях (16):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1, \quad j = \overline{1, n}; \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, \quad i = \overline{1, n}; \\ U_i - U_j + nx_{ij} &\leq n - 1; \\ i, j &= \overline{1, n}; i \neq j, \end{aligned} \quad (16)$$

где U_i и U_j – произвольные вещественные значения.

Первое ограничение означает, что коммивояжёр из каждого пункта выезжает только один раз; второе ограничение означает, что коммивояжёр въезжает в любой пункт только один раз; последнее соотношение обеспечивает замкнутость маршрута, содержащего n пунктов и отсутствие петель.

Для решения задач дискретного линейного программирования широко применяются комбинаторные методы, основная идея которых заключается в замене полного перебора всех решений их частичным перебором.

Одним из таких методов является *метод ветвей и границ*, в основе которого лежат следующие построения, позволяющие существенно уменьшить объём перебора решений:

- вычисление нижней границы (оценки);
- разбиение на подмножества, то есть ветвление;
- пересчёт оценок;

- нахождение решений;
- определение признака оптимальности;
- оценка точности приближённого решения.

Для реализации метода ветвей и границ применительно к задаче коммивояжёра необходимо конкретизировать правила ветвления, вычисления оценок и нахождения решений.

4.2 Алгоритм метода ветвей и границ для задачи коммивояжёра

Сущность алгоритма состоит в следующем.

1. Обозначим через G^0 множество всех циклов, среди которых отыскивается кратчайший цикл $t^*: l(t^*) = \min l(t)$. При этом под циклом будем понимать набор из n упорядоченных пар пунктов, образующих замкнутый маршрут, который проходит через каждый пункт только один раз:

$$t = [(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{n-1}, i_n), (i_n, i_1)].$$

Длина маршрута равна (17):

$$l(t) = \sum_{(i,j) \in t} C_{ij}. \quad (17)$$

2. Вычислим далее оценку для множества G^0 . Для этого введём понятие приведённой матрицы и процесса приведения. Пусть $h_i = \min_j C_{ij}$, тогда:

$$C'_{ij} = C_{ij} - h_i \geq 0 \text{ и } l(t) = \sum_{i=1}^n h_i + C'_{i_1, i_2} + C'_{i_2, i_3} + \dots + C'_{i_n, i_1}. \quad (18)$$

Пусть $H_i = \min_j C'_{ij}$, тогда

$$C''_{ij} = C'_{ij} - H_j \geq 0 \text{ и } l(t) = \sum_{i=1}^n h_i + \sum_{j=1}^n H_j + C''_{i_1, i_2} + C''_{i_2, i_3} + \dots + C''_{i_n, i_1}. \quad (19)$$

Полученная матрица C'' называется приведённой. Она обладает тем свойством, что в каждой её строке и столбце имеется по крайней мере один нуль. Процесс, позволяющий из неотрицательной матрицы C получить приведённую неотрицательную матрицу C'' , называется *приведением*. Сумма вычитаемых в процессе приведения элементов называется приводящими константами и обозначается h_Σ . Оптимальный план задачи о коммивояжёре с матрицей C'' является оптимальным и для задачи о коммивояжёре с матрицей C . Длина цикла $l_1(t)$ на приведённой матрице будет меньше длины цикла $l(t)$ на исходной матрице на сумму констант:

$$l(t) = l_1(t) + h_\Sigma. \quad (20)$$

Так как приведённая матрица содержит только неотрицательные элементы, то сумма приводящих констант может служить нижней границей длины цикла t при исходной матрице C , т.е. является оценкой исходного множества G^0 : $\xi(G^0) = h_\Sigma$.

3. Произведём ветвление множества G^0 на два непересекающихся подмножества G_1 и G_2 :

- подмножество G_1 получается из множества G^0 при добавлении следующего условия: из пункта r следует непосредственно идти в пункт s ;
- подмножество G_2 получается из множества G^0 при добавлении следующего условия: из пункта r следует непосредственный переход в пункт s .

При этом пару пунктов (r, s) выбирают так, чтобы множество G_1 с наибольшей вероятностью содержало оптимальный цикл, а множество G_2 – не содержало. Следовательно, пара (r, s) выбирается из множества пар претендентов (i, j) , которым соответствуют нулевые элементы матрицы C , т.е. $C_{ij} = 0$, таким образом, чтобы циклам, входящим в подмножество G_2 , соответствовали как можно более длинные пути. Так как по определению подмножества G_2 путь по любому из этих циклов переходит из пункта r в некоторый промежуточный пункт $j (j \neq s)$, а в пункт s коммивояжёр приезжает из некоторого пункта $i (i \neq r)$, длина этого пути будет не меньше чем:

$$\theta(r, s) = \min_{j \neq s} C_{rj} + \min_{i \neq r} C_{is} \quad (21)$$

Поэтому необходимо выбрать пару (r, s) так, чтобы $\theta(r, s)$ было максимально, т.е.

$$\theta(r, s) = \max_{i, j} \theta(i, j) = \max_{i, j} \left\{ C_{rj} \min_{j' \neq j} C_{ij'} + \min_{i' \neq i} C_{i'j} \right\} \quad (22)$$

при условии $C_{ij} = 0$.

4. Выполним преобразование матрицы расстояний при ветвлении и пересчитаем оценки. Каждому подмножеству, полученному в результате ветвления, будет соответствовать своя приведенная матрица и своя оценка. Матрица C_2 , соответствующая подмножеству G_2 , получается из матрицы C в результате следующих преобразований:

- запрещается переезд из пункта r в пункт s : $C_{rs} \rightarrow \infty$;
- проводится процедура приведения матрицы.

Оценка подмножества G_2 равна оценке исходного множества G^0 и $\theta(r, s)$ (23):

$$\xi(G_2) = \xi(G^0) + \theta(r, s). \quad (23)$$

Для построения матрицы C_2 , соответствующей подмножеству G_1 , выполняются следующие преобразования матрицы C_2 :

- вычеркивается строка r и столбец s из матрицы C , так как из каждого пункта можно выезжать только один раз и в каждый пункт можно въезжать только один раз;
- запрещается переезд из пункта s в пункт r $C_{rs} \rightarrow \infty$, а также все другие переезды, которые приводят к образованию замкнутых подциклов;
- выполняется процесс приведения матрицы C .

Оценка подмножества G_1 равна оценке исходного множества G^0 и сумме приводящих констант (24):

$$h_{\Sigma}^{(1)} = \sum_{i=1}^n h_i^{(1)} + \sum_{j=1}^n H_j^{(1)}; \quad \xi(G_1) = \xi(G^0) + h_{\Sigma}^{(1)}. \quad (24)$$

Для дальнейшего ветвления на следующем шаге выбирается то из двух полученных подмножеств G_1 и G_2 , которое имеет наименьшую оценку. Процесс построения и оценивания подмножеств продолжается до тех пор, пока не будет получена матрица размерности 2×2 , которая содержит только две допустимые пары пунктов. Эти пары являются замыкающими для некоторого маршрута без петель.

5. Проверим условие оптимальности. Если оценка полученного замкнутого маршрута не больше оценок всех допустимых для дальнейшего ветвления подмножеств (висячих вершин дерева), то он является оптимальным. Если существует хотя бы одно подмножество с меньшей оценкой, то построенный цикл запоминается. Процесс ветвления продолжается исходя из множества с меньшей оценкой до тех пор, пока нижние границы новых подмножеств остаются меньше длины выделенного цикла. В ходе ветвления либо будет построен цикл меньшей длины, либо обнаружится, что на новых подмножествах он не существует, т.е. оценка для каждого из них не меньше рекорда (длины кратчайшего из ранее полученных циклов).

Чтобы проиллюстрировать алгоритм метода ветвей и границ для решения задачи о коммивояжере приведем численный пример.

4.3 Пример решения задачи о коммивояжере

Задача 4.1

Имеется шесть пунктов, которые должен посетить коммивояжер по одному разу, минимизируя пройденный путь, и вернуться в исходный пункт. Расстояние между пунктами заданы матрицей $C = (c_{ij})$, $i=1, 2, \dots, 6; j=1, 2, \dots, 6$

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 21 & 37 & 20 & 14 & 42 \\ 15 & \infty & 12 & 3 & 25 & 9 \\ 22 & 12 & \infty & 31 & 7 & 28 \\ 19 & 6 & 24 & \infty & 17 & 13 \\ 8 & 41 & 23 & 15 & \infty & 6 \\ 16 & 4 & 8 & 11 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

Решение

1. Осуществим приведение матрицы C по строкам и столбцам. Приведенную матрицу $C^{(0)}$ представим в виде таблицы 15, приводящие константы по строкам и столбцам запишем соответственно справа матрицы и снизу.

Таблица 15 – Приведённая матрица

$$C^{(0)} =$$

$\begin{matrix} j \\ i \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	h_i
1	∞	7	19	6	0	28	14
2	10	∞	5	0	22	6	3
3	13	5	∞	24	0	21	7
4	11	0	14	∞	11	7	6
5	0	35	13	9	∞	0	6
6	10	0	0	7	1	∞	4
H_j	2	0	4	0	0	0	

2. Определим оценку множества G^0 , вычислив сумму приводящих констант:

$$\xi(G^0) = \sum_{i=1}^6 h_i + \sum_{j=1}^6 H_j = 40 + 6 = 46.$$

Шаг 1

1.1. Выберем пары пунктов претендентов на ветвление, т.е. (i, j) , для которых $C_{ij} = 0$:

$$C_{15} = 0; C_{24} = 0; C_{35} = 0; C_{42} = 0; C_{51} = 0; C_{56} = 0; C_{62} = 0; C_{63} = 0.$$

Для выделенных претендентов подсчитаем оценки по формуле:

$$\theta(i, j) = \min_{j' \neq j} C_{ij'} + \min_{i' \neq i} C_{i'j}.$$

$$\theta(1, 5) = 6 + 0 = 6; \quad \theta(2, 4) = 5 + 6 = 11; \quad \theta(3, 5) = 5 + 0 = 5;$$

$$\theta(4, 2) = 7 + 0 = 7;$$

$$\theta(5, 1) = 0 + 10 = 10; \theta(5, 6) = 0 + 6 = 6; \theta(6, 2) = 0; \theta(6, 3) = 0 + 5 = 5.$$

Для ветвления выберем пару претендентов с максимальной оценкой $\theta(i, j)$, т.е. пару $(2, 4)$, так как $\max \theta(i, j) = \theta(2, 4) = 11$.

1.2. Произведем ветвление: $G^0 = G_1^1 \cup G_2^1$, где $G_1^1 = \{2, 4\}$, а $G_2^1 = \overline{\{2, 4\}}$.

1.3. Вычислим оценку для G_2^1 :

$$\xi(G_2^1) = \xi(G^0) + \theta(2, 4) = 46 + 11 = 57.$$

1.4. Построим матрицу $C_1^{(1)}$, для этого вычеркнем в матрице $C^{(0)}$ вторую строку и четвертый столбец. Чтобы избежать образования замкнутых подциклов, запретим переезд из пункта 4 в пункт 2, полагая $C_{42} \rightarrow \infty$, и выполним процесс приведения. В результате получим матрицу $C_1^{(1)}$ (таблица 16).

Таблица 16 – Матрица $C_1^{(1)}$

$$C_1^{(1)} =$$

$\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}$	1	2	3	5	6	h_i
1	∞	7	19	0	28	0
3	13	5	∞	0	21	0
4	4	∞	7	4	0	7
5	0	35	13	∞	0	0
6	10	0	0	1	∞	
H_j	0	0	0	0	0	

Определим оценку для множества G_1^1 :

$$\xi(G_1^1) = \xi(G^0) + \sum h_i + \sum H_j = 46 + 7 = 53.$$

Так как $\xi(G_1^1) < \xi(G_2^1)$, то на следующем шаге разбиваем подмножество G_1^1 .

Шаг 2

2.1. Выберем пары пунктов претендентов на ветвление:

$$C_{15} = 0; C_{35} = 0; C_{46} = 0; C_{51} = 0; C_{56} = 0; C_{62} = 0; C_{63} = 0.$$

Для выделенных претендентов подсчитаем оценки:

$$\theta(1, 5) = 7; \theta(3, 5) = 5; \theta(4, 6) = 4; \theta(5, 1) = 4; \theta(5, 6) = 0; \theta(6, 2) = 5; \theta(6, 3) = 7.$$

Максимальную оценку имеют две пары претендентов (1, 5) и (6, 3): $\max \theta(i, j) = \theta(1, 5) = \theta(6, 3) = 7$. Выберем для ветвления пару пунктов (1, 5).

2.2. Произведем ветвление: $G_1^1 = G_1^2 \cup G_2^2$, где $G_1^2 = \{(2, 4), (1, 5)\}$ и $G_2^2 = \{(2, 4), (\overline{1, 5})\}$.

2.3. Вычислим оценку для G_2^2 :

$$\xi(G_2^2) = \xi(G_1^1) + \theta(1, 5) = 53 + 7 = 60.$$

2.4. Построим матрицу $C_1^{(2)}$ (таблица 17), вычеркнув первую строку и пятый столбец с матрицы $C_1^{(1)}$, и, полагая $C_{51} \rightarrow \infty$, выполним процесс приведения.

Таблица 17 – Матрица $C_1^{(2)}$

$$C_1^{(2)} =$$

$\begin{smallmatrix} j \\ i \end{smallmatrix}$	1	2	3	6	h_i
3	4	0	∞	16	5
4	0	∞	7	0	0
5	∞	35	13	0	0
6	6	0	0	∞	0
H_j	4	0	0	0	

Вычислим оценку для множества G_1^2 :

$$\xi(G_1^2) = \xi(G_1^1) + \sum h_i + \sum H_j = 53 + 9 = 62.$$

Так как $\xi(G_1^2) > \xi(G_2^2)$, то на следующем шаге производим ветвление подмножества G_2^2 . С этой целью построим матрицу $C_2^{(2)}$ (таблица 18). Для этого в матрице $C_1^{(1)}$ полагаем $C_{15} \rightarrow \infty$ и выполняем процесс приведения.

Таблица 18 – Матрица $C_2^{(2)}$

$$C_2^{(2)} =$$

$i \backslash j$	1	2	3	5	6	h_i
1	∞	0	12	∞	21	7
3	13	5	∞	0	21	0
4	4	∞	7	4	0	0
5	0	35	13	∞	0	0
6	10	0	0	1	∞	0
H_j	0	0	0	0	0	

Вычислим оценку для подмножества G_2^2 :

$$\xi(G_2^2) = \xi(G_1^1) + \sum h_i + \sum H_j = 53 + 7 = 60.$$

Шаг 3

3.1. Выберем пары пунктов претендентов на ветвление:

$$C_{12} = 0; C_{35} = 0; C_{46} = 0; C_{51} = 0; C_{56} = 0; C_{62} = 0; C_{63} = 0.$$

Определим для выделенных претендентов оценки:

$$\theta(1, 2) = 12; \quad \theta(3, 5) = 6; \quad \theta(4, 6) = 4; \quad \theta(5, 1) = 4; \quad \theta(5, 6) = 0; \\ \theta(6, 2) = 0; \quad \theta(6, 3) = 7.$$

Для ветвления выберем пару пунктов (1, 2), так как $\max \theta(i, j) = \theta(1, 2) = 12$.

3.2. Произведем ветвление:

$$G_2^2 = G_1^3 \cup G_2^3, \quad \text{где} \quad G_1^3 = \{(2, 4), (1, 5), (1, 2)\} \quad \text{и} \\ G_2^3 = \{(2, 4), (1, 5), (1, 2)\}.$$

3.3. Вычислим оценку для G_2^3 :

$$\xi(G_2^3) = \xi(G_2^2) + \theta(1, 2) = 60 + 12 = 72.$$

3.4. Построим матрицу $C_1^{(3)}$ (таблица 19). Для этого вычеркнем первую строку и второй столбец в матрице $C_2^{(2)}$, и, чтобы избежать образования замкнутых подциклов, запретим переезд из пункта 4 в пункт 1 ($C_{41} \rightarrow \infty$).

Таблица 19 – Матрица $C_1^{(3)}$

$$C_1^{(3)} =$$

$i \backslash j$	1	3	5	6
3	13	∞	0	21
4	∞	7	4	0
5	0	13	∞	0
6	10	0	1	∞

Поскольку полученная матрица $G_1^{(3)}$ является приведенной, оценка для подмножества G_1^3 равна оценке для подмножества G_2^2 :

$$\xi(G_1^3) = \xi(G_2^2) = 60.$$

А так как $\xi(G_1^3) > \xi(G_2^3)$, то для ветвления на очередном шаге выберем подмножество G_1^3 .

Шаг 4

4.1. Выберем пары пунктов претендентов на ветвление:

$$C_{35} = 0; C_{46} = 0; C_{51} = 0; C_{56} = 0; C_{63} = 0.$$

Для выделенных претендентов подсчитаем оценки:

$$\theta(3, 5) = 14; \theta(4, 6) = 4; \theta(5, 1) = 10; \theta(5, 6) = 0; \theta(6, 3) = 8.$$

Для ветвления выберем пару претендентов (3, 5), так как $\max \theta(i, j) = \theta(3, 5) = 14$.

4.2. Произведем ветвление: $G_1^3 = G_1^4 \cup G_2^4$,

где $G_1^4 = \{(2, 4), (1, 5), (1, 2), (3, 5)\}$ $G_2^4 = \{(2, 4), (1, 5), (1, 2), (3, 5)\}$.

4.3. Вычислим оценку для G_2^4 :

$$\xi(G_2^4) = \xi(G_1^3) + \theta(3, 5) = 60 + 14 = 74.$$

4.4. Построим матрицу $C_1^{(4)}$ (таблица 20), вычеркнув третью строку и пятый столбец в матрице $C_1^{(3)}$, и запретив переезд из пункта 5 в пункт 3 ($C_{53} \rightarrow \infty$).

Таблица 20 – Матрица $C_1^{(4)}$

$$C_1^{(4)} =$$

$i \backslash j$	1	3	6
4	∞	7	0
5	0	∞	0
6	10	0	∞

Так как матрица $G_1^{(4)}$ – приведенная, оценка для подмножества G_1^4 равна оценке для подмножества G_1^3 : $\xi(G_1^4) = \xi(G_1^3) = 60$. А так как $\xi(G_1^4) < \xi(G_2^4)$, то для ветвления на очередном шаге выберем подмножество G_1^4 .

Шаг 5

5.1. Выберем пары претендентов на ветвление:

$$C_{46} = 0; C_{51} = 0; C_{56} = 0; C_{63} = 0.$$

Вычислим оценки для выделенных претендентов:

$$\theta(4, 6) = 7; \theta(5, 1) = 10; \theta(5, 6) = 0; \theta(6, 3) = 17.$$

Для ветвления выберем пару пунктов (6, 3), так как $\max \theta(i, j) = \theta(6, 3) = 17$.

5.2. Произведем ветвление: $G_1^4 = G_1^5 \cup G_2^5$,

где $G_1^5 = \{(2, 4), (1, 5), (1, 2), (3, 5), (6, 3)\}$ и

$$G_2^5 = \{(2, 4), (1, 5), (1, 2), (3, 5), (6, 3)\}.$$

5.3. Вычислим оценку для G_2^5 :

$$\xi(G_2^5) = \xi(G_1^4) + \theta(6, 3) = 60 + 17 = 77.$$

5.4. Построим матрицу $C_1^{(5)}$ (таблица 21). Для этого вычеркнем шестую строку и третий столбец в матрице $C_1^{(4)}$, и, чтобы избежать образования замкнутых циклов, запретим переезд из пункта 5 в пункт 6 ($C_{56} \rightarrow \infty$).

Таблица 21 – Матрица $C_1^{(5)}$

$$C_1^{(4)} = \begin{array}{c|cc} & j & & \\ \hline i & 1 & 6 & \\ \hline 4 & \infty & 0 & \\ 5 & 0 & \infty & \end{array}$$

Так как полученная матрица – приведенная, то $\xi(G_1^5) = \xi(G_1^4) = 60$.

Матрица $G_1^{(5)}$ имеет размерность 2×2 и допускает включение в маршрут только двух пар пунктов (4, 6) и (5, 1), что соответствует шагам 6–7. В результате получаем цикл $t = \{(2, 4), (1, 5), (1, 2), (3, 5), (6, 3), (4, 6), (5, 1)\}$, отвечающий множеству G_1^7 . Длина цикла t равна оценке для подмножества G_1^7 :

$$l(t) = \xi(G_1^7) = 60.$$

Сравним длину этого цикла с полученными ранее оценками для неветвленных подмножеств (рисунок 26). Подмножество G_2^1 имеет меньшую оценку, чем построенный цикл:

$$\xi(G_2^1) = 57 < \xi(G_1^7) = 60.$$

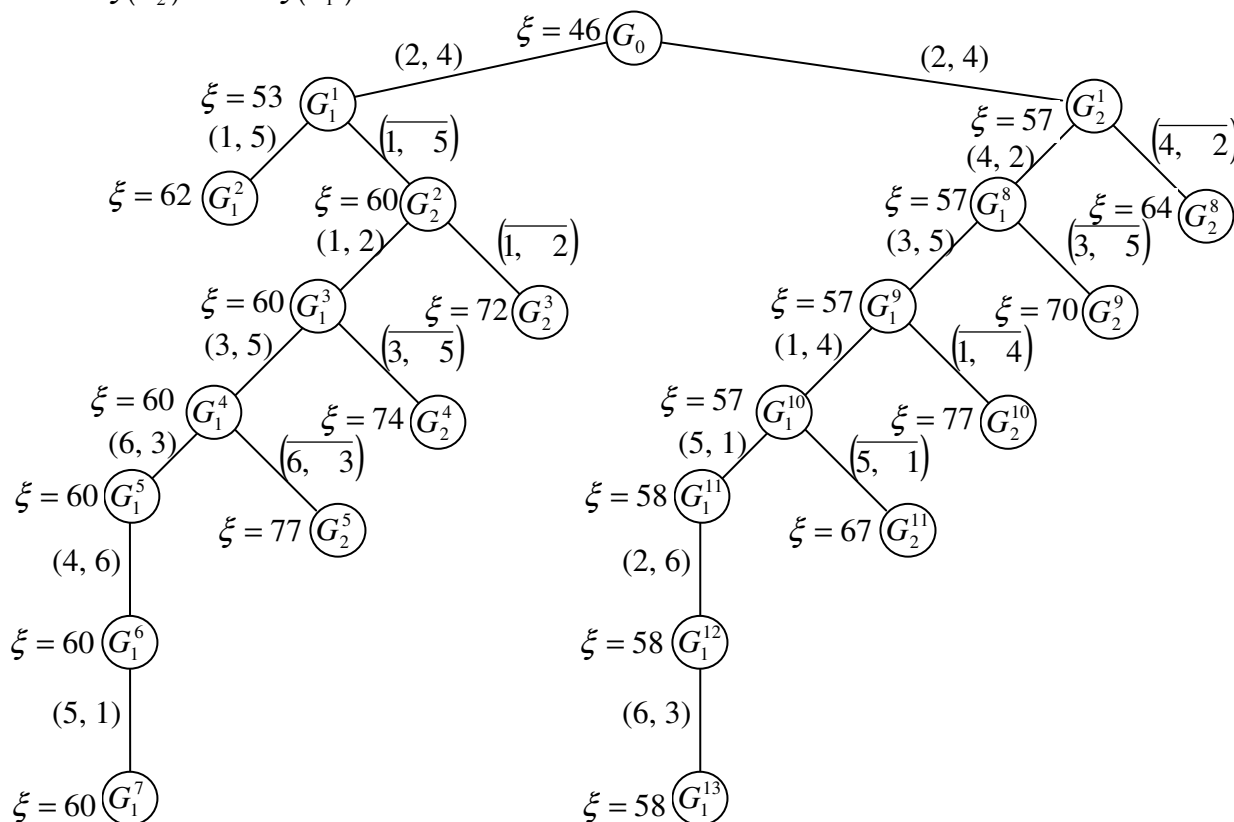


Рисунок 26 – Дерево решений

Это подмножество может привести к образованию цикла с меньшей оценкой, поэтому оно должно быть подвергнуто анализу. Для начала

необходимо восстановить исходную матрицу G_0 , запретить переезд из пункта 2 в пункт 4 ($C_{24} \rightarrow \infty$) и произвести приведение. В результате получим матрицу $G_2^{(1)}$ (таблица 22), соответствующую подмножеству G_2^1 .

Таблица 22 – Матрица $G_2^{(1)}$

$$C_2^{(1)} =$$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	h_i
1	∞	7	19	0	0	28	0
2	5	∞	0	∞	17	1	5
3	13	5	∞	18	0	21	0
4	11	0	14	∞	11	7	0
5	0	35	13	3	∞	0	0
6	10	0	0	1	1	∞	0
H_j	0	0	0	6	0	0	

Оценка для подмножества G_2^1 равна оценке для подмножества G_0 и сумме приводящих констант:

$$\xi(G_2^1) = 46 + 11 = 57.$$

Далее, произведем ветвление подмножества G_2^1 , выполнив очередной шаг 8.

Шаг 8

8.1. Выберем пары претендентов на ветвление:

$$C_{14} = 0; \quad C_{15} = 0; \quad C_{23} = 0; \quad C_{35} = 0; \quad C_{42} = 0; \quad C_{51} = 0; \quad C_{56} = 0; \quad C_{62} = 0; \\ C_{63} = 0.$$

Вычислим оценки для выделенных претендентов:

$$\theta(1, 4) = 1; \quad \theta(1, 5) = 0; \quad \theta(2, 3) = 1; \quad \theta(3, 5) = 5; \quad \theta(4, 2) = 7; \quad \theta(5, 1) = 5; \\ \theta(5, 6) = 1; \quad \theta(6, 2) = 0; \quad \theta(6, 3) = 0.$$

Для ветвления выберем пару пунктов (4, 2), так как $\theta(4, 2) = \max \theta(i, j) = 7$.

8.2. Произведем ветвление: $G_1^2 = G_1^8 \cup G_2^8$, где $G_1^8 = \{(2, 4), (4, 2)\}$, а $G_2^8 = \{(2, 4), (4, 2)\}$.

8.3. Вычислим оценку для G_2^8 :

$$\xi(G_2^8) = \xi(G_2^1) + \theta(4, 2) = 57 + 7 = 64.$$

8.4. Построим матрицу $C_1^{(8)}$ (таблица 23), вычеркнув четвертую строку и второй столбец с матрицы $C_2^{(1)}$.

Таблица 23 – Матрица $C_1^{(8)}$

$$C_1^{(8)} =$$

$i \backslash j$	1	3	4	5	6
1	∞	19	0	0	28
2	5	0	∞	17	1
3	13	∞	18	0	21
5	0	13	3	∞	0
6	10	0	1	1	∞

Полученная матрица является приведенной, поэтому $\xi(G_1^8) = \xi(G_2^1) = 57$. Поскольку $\xi(G_1^8) < \xi(G_2^8)$, для ветвления на следующем шаге выбираем подмножество G_1^8 .

Шаг 9

9.1. Выберем пары претендентов на ветвление:

$$C_{14} = 0; C_{15} = 0; C_{23} = 0; C_{35} = 0; C_{51} = 0; C_{56} = 0; C_{63} = 0.$$

Вычислим оценки для выделенных претендентов:

$$\theta(1, 4) = 1; \theta(1, 5) = 0; \theta(2, 3) = 1; \theta(3, 5) = 13; \theta(5, 1) = 5; \theta(5, 6) = 1; \theta(6, 3) = 1.$$

Для ветвления выберем пару пунктов (3, 5), так как $\theta(3, 5) = \max \theta(i, j) = 13$.

9.2. Произведем ветвление: $G_1^8 = G_1^9 \cup G_2^9$, где $G_1^9 = \{(2, 4), (4, 2), (3, 5)\}$, а $G_2^9 = \{(2, 4), (4, 2), (3, 5)\}$.

9.3. Вычислим оценку для G_2^9 :

$$\xi(G_2^9) = \xi(G_1^8) + \theta(3, 5) = 57 + 13 = 70.$$

9.4. Построим матрицу $C_1^{(9)}$ (таблица 24). Для этого вычеркнем третью строку и пятый столбец в матрице $C_1^{(8)}$, запретим переезд из пункта 5 в пункт 3 ($C_{53} \rightarrow \infty$).

Таблица 24 – Матрица $C_1^{(9)}$

$$C_1^{(9)} =$$

$i \backslash j$	1	3	4	6
1	∞	19	0	28
2	5	0	∞	1
5	0	∞	3	0
6	10	0	1	∞

Так как матрица является приведенной, то $\xi(G_1^9) = \xi(G_1^8) = 57$.

Для дополнительного ветвления выбирается подмножество G_1^9 , имеющее меньшую оценку.

Последующие шаги 10–13 выполняются аналогичным образом. Полученные результаты на каждом шаге представлены на рисунке 3. Из анализа полученного дерева решений видно, что наименьшую оценку среди висячих вершин имеет вершина G_1^{13} . Следовательно, оптимальным маршрутом является соответствующий подмножеству G_1^{13} цикл $t^* = \{(2, 4), (4, 2), (3, 5), (1, 4), (5, 1), (2, 6), (6, 3)\}$, имеющий наименьшую длину $l(t^*) = 58$, а последовательность объезда пунктов можно представить следующим образом:

$$4 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 4.$$

4.4 Задачи для самостоятельного решения с ответами

Задача 4.2

Имеется шесть пунктов, которые должен посетить коммивояжер. Расстояния между пунктами заданы матрицей $C = (c_{ij})$, $i=1, 2, \dots, 6$;

$$C = \begin{matrix} & j=1, 2, \dots, 6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \infty & 29 & 45 & 18 & 32 & 28 \\ 9 & \infty & 18 & 3 & 32 & 27 \\ 22 & 15 & \infty & 37 & 7 & 2 \\ 23 & 18 & 27 & \infty & 20 & 20 \\ 14 & 48 & 29 & 50 & \infty & 7 \\ 25 & 7 & 7 & 11 & 7 & \infty \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Необходимо отыскать кратчайший замкнутый маршрут, подходящий через каждый пункт один раз.

Ответ

Оптимальный замкнутый маршрут $t^* = \{(1, 4), (2, 1), (5, 6), (3, 5), (4, 3), (6, 2)\}$ имеет длину $l(t^*) = 75$. Соответствующую ему последовательность объезда пунктов можно представить следующим образом:

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

Задача 4.3

Имеется шесть пунктов, которые должен посетить коммивояжер. Расстояния между пунктами заданы матрицей $C = (c_{ij})$.

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 2 & 6 & 8 & 11 \\ 8 & \infty & 4 & 5 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & \infty & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 3 & 5 & \infty & 3 & 12 \\ 4 & 6 & 8 & 5 & \infty & 9 \\ 1 & 5 & 3 & 12 & 4 & \infty \end{pmatrix}$$

Необходимо отыскать кратчайший замкнутый маршрут, подходящий через каждый пункт один раз.

Ответ

Оптимальный замкнутый маршрут $t^* = \{(1, 3), (3, 6), (5, 1), (2, 4), (4, 5), (6, 2)\}$ имеет длину $l(t^*) = 21$. Соответствующую ему последовательность объезда пунктов можно представить следующим образом:

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1.$$

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТНОЙ ЛОГИСТИКИ МЕТОДОМ “СЕВЕРО-ЗАПАДНОГО УГЛА”

В общем виде любая транспортная задача может быть задана в виде таблицы (таблица 25), с помощью которой формируется опорный план, а затем осуществляются преобразования с использованием метода “северо-западного угла”.

Таблица 25 – Исходные данные

	1	2	...	n	
1	c_{11} x_{11}	c_{11} x_{11}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{11} x_{11}	c_{11} x_{11}	...	c_{1n} x_{1n}	a_2
⋮	
m	c_{11} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
	b_1	b_2	...	b_n	d

Каждая клетка этой таблицы (исключая её первый столбец и последнюю строку) соответствует определенной паре поставщик-потребитель. А именно: клетка, расположенная в i -м вертикальном и j -м горизонтальном ряду, соответствует паре i -й поставщик – j -й потребитель. В клетки будем заносить объёмы перевозок по соответствующему маршруту. Будем строить допустимое решение задачи, начиная с установления объёма перевозок по маршруту (1, 1), т.е. с заполнения верхней левой («северо-западной») клетки таблицы. Примем его максимально возможным по условиям задачи, т.е. равным

$$x_{11} = \min(a_1, b_1). \quad (26)$$

Если $a_1 < b_1$, то поставщик 1 полностью использовал свои возможности, и при установлении остальных перевозок его можно не учитывать, а потребность потребителя 1 теперь будет равна $(b_1 - a_1)$. Если $a_1 > b_1$, то потребитель полностью удовлетворил свою потребность в продукции, и его можно дальше не учитывать, а поставщик 1 теперь располагает лишь $(a_1 - b_1)$ единицами продукции. Если $a_1 = b_1$, то из рассмотрения можно исключить и потребителя, и поставщика. Однако условимся считать, что в этом случае "выбыл из игры" только один из них (пусть для определённости – поставщик), а возможные поставки (и соответственно потребность) второго равны нулю.

Из этих рассуждений следует, что после установления объёма перевозок по маршруту (1, 1) мы имеем дело с новой задачей, в которой суммарное

число поставщиков и потребителей на единицу меньше, чем в исходной. В северо-западную клетку таблицы этой новой задачи, полученной мысленным вычеркиванием первой строки или столбца из старой таблицы, снова помещаем максимально возможный объём перевозок (он может оказаться и нулевым). Этот процесс продолжается до распределения всего количества груза. Как правило, число всех заполненных клеток есть $(m + n - 1)$, где m – число поставщиков, n – число потребителей. Продолжая этот процесс, мы, очевидно, придём к допустимому решению задачи, так как

$$\sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j = d. \quad (27)$$

5.1 Пример решения транспортной задачи

Для иллюстрации использования метода северо-западного угла рассмотрим на конкретном примере все этапы решения транспортной задачи.

Задача 5.1. На двух складах A и B имеется соответственно 50 и 40 т груза. Требуется спланировать перевозки к трем потребителям C , D и E так, чтобы потребитель C получил 30 т, D – 20 т, E – 40 т, а затраты на перевозку были минимальными. Стоимость перевозки от складов к потребителям указана в таблице 26.

Таблица 26 – Исходные данные к задаче

Склады \ Потребители				
	C	D	E	
A	<div>3</div> x_{11}	<div>2</div> x_{12}	<div>1</div> x_{13}	50
B	<div></div> x_{21}	<div></div> x_{22}	<div></div> x_{23}	40
	30	20	40	90

Решение. Составим математическую модель этой задачи. На множестве решений системы

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 50; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 40; \\ x_{11} + x_{12} = 30; \\ x_{21} + x_{22} = 20; \\ x_{13} + x_{23} = 40; \\ x_{ij} > 0; i = 1, 2; j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

нужно найти минимальное значение целевой функции

$$F = 3x_{11} + 2x_{12} + x_{13} + 3x_{21} + 5x_{22} + 6x_{23}.$$

1. Составим методом северо-западного угла первое распределение поставок, начиная с заполнения верхней левой ("северо-западной") клетки таблицы. Примем объём перевозки со склада *A* к потребителю *C* максимально возможным исходя из условий задачи и равным 30. Потребитель *C* полностью удовлетворил свою потребность, и столбец *C* в таблице 27 можно исключить из дальнейшего рассмотрения.

Таблица 27 – Первое распределение поставок

Потребители Склады	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	
<i>A</i>	30	20	50	
<i>B</i>	40	40		
	30	20	40	

В таблице поставок найдём новый северо-западный угол – это клетка *AD* и укажем в ней максимально возможное значение, которое рассчитывается следующим образом: со склада *A* уже перевезено 30 т груза, значит, остаток составляет $50 - 30 = 20$ т. Весь груз со склада *A* перевезён потребителям, и первая строка таблицы поставок исключается из дальнейшего рассмотрения. Потребитель *D* полностью удовлетворил свою потребность в грузе, и столбец *D* в таблице 3 можно исключить из дальнейшего рассмотрения. В оставшейся части таблицы найдём новый северо-западный угол – это клетка *BE* и укажем в ней максимально возможное значение (40 т). Итак, таблица 3 является исходным распределением поставок:

$$x_{11} = 30; x_{12} = 20; x_{23} = 40.$$

Получим следующее значение целевой функции:

$$F = 3 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 6 \cdot 40 = 370 \text{ (руб.)}.$$

В этой задаче два поставщика ($m=2$) и три потребителя ($n=3$). Вычисляем значение выражения для нашей задачи: $m+n-1=4$. Из построенной таблицы видно, что число занятых мест равно только 3, т.е. меньше значения $(m+n-1)$.

2. Проверим полученный результат на оптимальность. Сформулируем математическую модель задачи, двойственной исходной. Для этого введём пять переменных u_1, u_2 (по числу складов) и v_1, v_2, v_3 (по числу потребителей). Составим таблицу 28.

Таблица 28 – Данные для математической модели

1-й план	30	20				40	
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	
u_1	1	1	1	0	0	0	50
u_2	0	0	0	1	1	1	40
v_1	1	0	0	1	0	0	30
v_2	0	1	0	0	1	0	20
v_3	0	0	1	0	0	1	40
c_{ij}	3	2	1	3	5	6	

Теперь двойственная задача может быть записана так: требуется найти максимальное значение целевой функции

$$F = 50u_1 + 40u_2 + 30v_1 + 20v_2 + 40v_3$$

на множестве решений системы:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 \leq 3; \\ u_1 + v_2 \leq 2; \\ u_1 + v_3 \leq 1; \\ u_2 + v_1 \leq 3; \\ u_2 + v_2 \leq 5; \\ u_2 + v_3 \leq 6. \end{cases}$$

Заметим, что все ограничения исходной задачи имеют вид равенств. Поэтому все переменные двойственной задачи (u_1, u_2, v_1, v_2, v_3) могут принимать отрицательные значения.

Проверка полученного плана на оптимальность осуществляется исходя из того, что если некоторые переменные исходной задачи строго больше нуля, то соответствующие им условия двойственной задачи выполняются как строгие неравенства. Получаем систему $(m + n - 1)$ уравнений с $(m + n)$ переменными: $u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n$.

Найдём одно из решений этой системы и подставим его в остальные неравенства системы ограничений двойственной задачи, не вошедшие в систему $(m + n - 1)$ уравнений. Если все эти неравенства выполняются (т.е. являются верными), то проверяемый план является оптимальным. Если часть неравенств является неверными, то возможно дальнейшее улучшение плана.

3. Переходим к следующему шагу. Занятым клеткам соответствует следующая система уравнений:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 3; \\ u_1 + v_2 = 2; \\ u_2 + v_3 = 6. \end{cases}$$

Положив u_1 равным нулю, решим эту систему. Из первого уравнения находим $v_1 = 3$, из второго – $v_2 = 2$. Надо заметить, что значения u_2 и v_2 мы не можем определить однозначно, так как они связаны только одним уравнением. Чтобы процесс решения на этом не обрывался, поступим следующим образом: клетку x_{13} (или x_{22}) будем считать занятой, поместив в неё число 0 (таблица 29). Это так называемая условная поставка. Теперь число занятых клеток равно четырём. Дальнейшее решение не отличается от обычного.

Решим систему:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 3; \\ u_1 + v_2 = 2; \\ u_1 + v_3 = 1; \\ u_2 + v_3 = 6, \end{cases} \quad (0; \ 5; \ 3; \ 2; \ 1); \quad \begin{cases} u_2 + v_1 \leq 3; \\ u_2 + v_2 \leq 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 8 \leq 3; \\ 7 \leq 5. \end{cases}$$

Таблица 29 – Условная поставка

Потребители Склады	C	D	E	
A	30 3	20 2	0 1	50
B	3	5	40 6	40
	30	20	40	

Полученный план ещё можно улучшить.

4. Приведём неравенства $8 \leq 3$, $7 \leq 5$ к виду $0 \leq -5$, $0 \leq -25$. Для клетки переменной x_{21} построим контур и перераспределим поставки (рисунок 27 и таблица 30).

	C	D	E
A	30 3	20	0 1
B	3		40 6

Рисунок 26 – Перераспределение поставок

Таблица 30 – Перераспределение поставок

Потребители Склады	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	
<i>A</i>	3	2	1	50
		20	30	
<i>B</i>	3	5	6	40
	30		10	
	30	20	40	

$$x_{12} = 20; x_{13} = 30; x_{21} = 30; x_{23} = 10.$$

Получим следующее значение целевой функции:

$$f_2 = 370 - 5 \cdot 30 = 220 \text{ (руб.)}.$$

5. Решим систему:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 2; \\ u_1 + v_3 = 1; \\ u_2 + v_1 = 3; \\ u_2 + v_3 = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 + v_1 \leq 3; \\ u_2 + v_2 \leq 5; \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \leq 3; \\ 7 \leq 5. \end{cases}$$

(0; 5; -2; 2; 1);

Полученный план можно еще улучшить (рисунок 28 и таблица 31)

	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
<i>A</i>		20 -	30 +
<i>B</i>	30 +	5 -	10 -

Рисунок 28 – Изменение плана поставок

Таблица 31 – Изменение плана поставок

Потребители Склады	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	
<i>A</i>	3	2	1	50
		10	40	
<i>B</i>	3	5	6	40
	30	10		
	30	20	40	

$$x_{12} = 20; x_{13} = 40; x_{21} = 30; x_{23} = 10.$$

Получим следующее значение целевой функции:

$$f_3 = 220 - 2 \cdot 10 = 200 \text{ (руб.)}.$$

5. Решим систему:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 2; \\ u_1 + v_3 = 1; \\ u_2 + v_1 = 3; \\ u_2 + v_2 = 5, \end{cases} \quad (0; \ 3; \ 0; \ 2; \ 1); \quad \begin{cases} u_2 + v_1 \leq 3; \\ u_2 + v_3 \leq 6; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq 3; \\ 4 \leq 6. \end{cases}$$

Оба неравенства верные, значит, задача решена.

$$F_{\max} = 0 \cdot 50 + 3 \cdot 40 + 0 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 40 = 200 \text{ (руб.)}.$$

Итак, если число занятых клеток после некоторого распределения поставок (совсем необязательно, чтобы это происходило после первого распределения) окажется меньше, чем $(m + n - 1)$, то с помощью условных поставок, равных нулю, надо заполнить недостающие для выполнения условия клетки, а затем решать как обычно. таким образом, по полученному оптимальному плану надо 10 т груза со склада *A* отправить потребителю *D* и 40 т – потребителю *E*. Со склада *B* отправляется 30 т потребителю *C*, а 10 т - потребителю *D*.

5.2 Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.2. На вокзалы *A* и *B* прибыло несколько комплектов мебели. Эту мебель нужно доставить в магазин *C*, *D* и *E* с учётом их потребностей. спланировать перевозки этой мебели так, чтобы общая стоимость этих перевозок была наименьшей. Необходимые данные для решения задачи указаны в таблице 32.

Таблица 32 – Исходные данные

Потребители Склады	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	
<i>A</i>	2 30	3 20	2 0	30
<i>B</i>	1 20	2 20	3 20	30 60

Ответ. Всего возможно 11 оптимальных решений. например:

$$x_{12} = 10; x_{13} = 20; x_{21} = 20; x_{22} = 10; f = 110 \text{ (руб.)}.$$

Задача 5.3. В пунктах A и B находятся заводы по производству кирпича, в пунктах C и D – карьеры, снабжающие их песком. Заводу A необходимо 40 т песка, заводу B – 50 т. Карьер C готов перевезти 70 т песка, а карьер D – 30 т. Требуется спланировать перевозки так, чтобы затраты на перевозку были минимальны. Условия задачи представлены в таблице 33. Для упрощения решения в таблицу введен условный потребитель E .

Таблица 33 – Условия задачи

Потребители		A	B	E	
Карьеры		2	6	0	
	C	x_{11}	x_{12}	x_{13}	70
	D	x_{21}	x_{22}	x_{23}	30
		40	50	10	100

Ответ. Оптимальный план: $x_{11} = 40$; $x_{12} = 20$; $x_{22} = 30$; $f = 290$ (руб.).

6. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ПО ЗАДАЧЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЛОГИСТИКИ

Таблица 34 – Вариант 6.1

Поставщики	Возможность поставки	Потребители и их спрос				
		1	2	3	4	5
		95	275	355	15	10
1	245	7	6	4	3	9
2	110	3	8	5	4	7
3	85	2	3	7	2	3
4	85	4	5	2	3	5
5	250	5	7	3	9	2

Таблица 35 – Вариант 6.2

Поставщики	Возможность поставки	Потребители и их спрос				
		1	2	3	4	5
		180	90	120	80	185
1	120	7	6	4	3	9
2	110	3	8	5	4	7
3	180	2	3	7	2	3
4	125	4	5	2	3	5
5	129	5	7	3	9	2

Таблица 36 – Вариант 6.3

Поставщики	Возможность поставки	Потребители и их спрос				
		1	2	3	4	5
		90	92	125	80	31
1	109	7	6	4	3	9
2	213	3	8	5	4	7
3	245	2	3	7	2	3
4	215	4	5	2	3	5
5	100	5	7	3	9	2

Таблица 37 – Вариант 6.4

Поставщики	Возможность поставки	Потребители и их спрос				
		1	2	3	4	5
		160	60	39	50	55
1	122	7	6	4	3	9
2	105	3	8	5	4	7
3	80	2	3	7	2	3
4	100	4	5	2	3	5
5	145	5	7	3	9	2

Таблица 38 – Вариант 6.5

Поставщики	Возможность поставки	Потребители и их спрос				
		1	2	3	4	5
		270	90	120	80	175
1	120	7	6	4	3	9
2	300	3	8	5	4	7
3	85	2	3	7	2	3
4	310	4	5	2	3	5
5	90	5	7	3	9	2

Таблица 39 – Вариант 6.6

Поставщики	Возможность поставки	Потребители и их спрос				
		1	2	3	4	5
		90	90	125	85	80
1	125	7	6	4	3	9
2	310	3	8	5	4	7
3	210	2	3	7	2	3
4	300	4	5	2	3	5
5	110	5	7	3	9	2

Таблица 40 – Вариант 6.7

Поставщики	Возможность поставки	Потребители и их спрос				
		1	2	3	4	5
		270	180	235	90	35
1	129	7	6	4	3	9
2	295	3	8	5	4	7
3	75	2	3	7	2	3
4	295	4	5	2	3	5
5	129	5	7	3	9	2

Таблица 41 – Вариант 6.8

Поставщики	Возможность поставки	Потребители и их спрос				
		1	2	3	4	5
		180	95	365	82	25
1	110	7	6	4	3	9
2	95	3	8	5	4	7
3	245	2	3	7	2	3
4	245	4	5	2	3	5
5	310	5	7	3	9	2

Таблица 42 – Вариант 6.9

Поставщики	Возможность поставки	Потребители и их спрос				
		1	2	3	4	5
		90	180	350	185	80
1	240	7	6	4	3	9
2	100	3	8	5	4	7
3	240	2	3	7	2	3
4	100	4	5	2	3	5
5	240	5	7	3	9	2

Таблица 43 – Вариант 6.10

Поставщики	Возможность поставки	Потребители и их спрос				
		1	2	3	4	5
		95	260	350	260	95
1	115	7	6	4	3	9
2	125	3	8	5	4	7
3	80	2	3	7	2	3
4	125	4	5	2	3	5
5	115	5	7	3	9	2

Таблица 44 – Вариант 6.11

Поставщики	Возможность поставки	Потребители и их спрос				
		1	2	3	4	5
		270	240	120	240	110
1	360	7	6	4	3	9
2	210	3	8	5	4	7
3	85	2	3	7	2	3
4	200	4	5	2	3	5
5	350	5	7	3	9	2

Таблица 45 – Вариант 6.12

Поставщики	Возможность поставки	Потребители и их спрос				
		1	2	3	4	5
		50	150	240	145	95
1	190	7	6	4	3	9
2	110	3	8	5	4	7
3	105	2	3	7	2	3
4	255	4	5	2	3	5
5	245	5	7	3	9	2

Таблица 46 – Вариант 6.13

Поставщики	Возможность поставки	Потребители и их спрос				
		1	2	3	4	5
		90	95	360	95	90
1	120	7	6	4	3	9
2	200	3	8	5	4	7
3	240	2	3	7	2	3
4	200	4	5	2	3	5
5	120	5	7	3	9	2

Таблица 47 – Вариант 6.14

Поставщики	Возможность поставки	Потребители и их спрос				
		1	2	3	4	5
		85	85	125	90	95
1	120	7	6	4	3	9
2	210	3	8	5	4	7
3	248	2	3	7	2	3
4	212	4	5	2	3	5
5	125	5	7	3	9	2

Таблица 48 – Вариант 6.15

Поставщики	Возможность поставки	Потребители и их спрос				
		1	2	3	4	5
		270	180	360	180	270
1	355	7	6	4	3	9
2	310	3	8	5	4	7
3	560	2	3	7	2	3
4	290	4	5	2	3	5
5	340	5	7	3	9	2

Таблица 49 – Вариант 6.16

Поставщики	Возможность поставки	Потребители и их спрос				
		1	2	3	4	5
		265	85	355	95	18
1	123	7	6	4	3	9
2	212	3	8	5	4	7
3	85	2	3	7	2	3
4	215	4	5	2	3	5
5	125	5	7	3	9	2

Таблица 50 – Вариант 6.17

Поставщики	Возможность поставки	Потребители и их спрос				
		1	2	3	4	5
		95	265	355	265	15
1	235	7	6	4	3	9
2	310	3	8	5	4	7
3	85	2	3	7	2	3
4	255	4	5	2	3	5
5	80	5	7	3	9	2

Таблица 51 – Вариант 6.18

Поставщики	Возможность поставки	Потребители и их спрос				
		1	2	3	4	5
		275	75	255	75	15
1	245	7	6	4	3	9
2	112	3	8	5	4	7
3	87	2	3	7	2	3
4	89	4	5	2	3	5
5	115	5	7	3	9	2

Таблица 52 – Вариант 6.19

Поставщики	Возможность поставки	Потребители и их спрос				
		1	2	3	4	5
		270	90	240	90	270
1	125	7	6	4	3	9
2	305	3	8	5	4	7
3	80	2	3	7	2	3
4	300	4	5	2	3	5
5	270	5	7	3	9	2

Таблица 53 – Вариант 6.20

Поставщики	Возможность поставки	Потребители и их спрос				
		1	2	3	4	5
		270	95	360	85	15
1	240	7	6	4	3	9
2	100	3	8	5	4	7
3	800	2	3	7	2	3
4	110	4	5	2	3	5
5	245	5	7	3	9	2

Таблица 54 – Вариант 6.21

Поставщики	Возможность поставки	Потребители и их спрос				
		1	2	3	4	5
		265	85	120	85	265
1	125	7	6	4	3	9
2	295	3	8	5	4	7
3	75	2	3	7	2	3
4	295	4	5	2	3	5
5	125	5	7	3	9	2

Таблица 55 – Вариант 6.22

Поставщики	Возможность поставки	Потребители и их спрос				
		1	2	3	4	5
		270	85	355	80	210
1	125	7	6	4	3	9
2	200	3	8	5	4	7
3	80	2	3	7	2	3
4	195	4	5	2	3	5
5	130	5	7	3	9	2

7. Управление запасами с применением ABC- и XYZ-анализа

7.1 Постановка задачи

В целях укрепления позиции на рынке руководство оптовой фирмы приняло решение расширить торговый ассортимент.

Свободных финансовых средств, необходимых для кредитования дополнительных товарных ресурсов, фирма не имеет. Свободных складских помещений также нет.

Перед службой логистики фирмы была поставлена задача сокращения общего объёма товарных запасов с целью сокращения затрат на их содержание и высвобождения ресурсов для расширения ассортимента.

Снижение запасов при этом не должно отразиться на уровне клиентского сервиса, т.е. на готовности компании к поставке товаров потребителям.

Торговый ассортимент фирмы, годовые и квартальные объёмы продаж по отдельным позициям представлены в задании в таблице 60.

Норма запаса, установленная в компании, составляет $C_{\text{нр}} = 20$ дней, т.е. средний запас рассчитан на 20 дней работы фирмы.

Число рабочих дней в году составляет $N=330$ дней.

Норма запаса одинакова по всем позициям ассортимента.

Годовые затраты на хранение на фирме в среднем составляют 30% от стоимости среднего запаса:

$$M=0,3 \text{ ед/год,}$$

где M – доля затрат на хранение в стоимости среднего запаса.

Выполняя задание руководства, служба логистики разделила весь торговый ассортимент на три группы А, В и С по признаку доли в реализации, а затем предложила новые дифференцированные нормативы среднего запаса:

для товаров группы А (лидеры в реализации) – сократить норму запаса и довести её до 10 дней;

для товаров группы В (средняя доля в реализации) норму запаса оставить без изменения – 20 дней;

для товаров группы С (очень низкая реализация) увеличить норму запаса, доведя её до 30 дней.

Анализ динамики продаж, который можно провести по таблице 60 поквартально, свидетельствует, что разные позиции ассортимента фирмы существенно отличаются друг от друга по показателю стабильности продаж.

Позиции с высокой амплитудой колебаний спроса при прочих равных условиях требуют более тщательного контроля и более высоких страховых запасов, чем позиции, потребляемые стабильно.

В связи с этим служба логистики выполнила также и анализ XYZ, разделив весь ассортимент на группы X, Y и Z по признаку стабильности спроса.

Показателем при этом выбран коэффициент вариации квартального спроса.

Результаты XYZ-анализа, соединённые с результатами ABC-анализа, позволили рекомендовать для отдельных продуктов компании разные системы контроля управления запасами.

7.2 Дифференцирование ассортимента по ABC-методу

Методические указания.

1. Сформировать цель ABC-анализа.
2. Указать объект управления, анализируемый ABC-методом (объектом управления в данной работе является отдельная позиция ассортимента).
3. Указать признак, на основе которого будет осуществляться дифференциация объектов управления (признаком дифференциации ассортимента на группы А, В и С в данной работе является доля годовых продаж по отдельной товарной позиции в общем объёме продаж).
4. Сформировать таблицу 56, заполнив на основе исходных данных графы 1 и 2. Рассчитать долю отдельных позиций ассортимента в общей реализации. Результат внести в графу 3.

Таблица 56 – Доля продукта в общей реализации.

Наименование продукта	Годовой объём реализации, тыс. руб.	Доля продукции в общей реализации, %
1	2	3
«Марс»	1788	4,78
«Милки Уэй» и т.д. (всего 50 позиций)	648	1,77
ИТОГО	36696	100

5. Выстроить ассортиментные позиции в порядке убывания доли продукта в общей реализации.
Результаты внести в таблицу 57.

Таблица 57 – ABC-анализ.

Наименование продукта	Годовой объём реализации, тыс.руб.	Доля продукта в общей реализации, %	№ строки упорядоченного списка	№ позиций ассортимента упоряд. списка нарастающим итогом в % к общему количеству позиций ассортимента (ОХ)	Доля продукта нарастающим итогом, % (ОУ)	Принадлежность к группам А, В и С
1	2	3	4	5	6	7
«Нескафе Классик»	7536	20,54	1	2	20,54	
«Сникерс»	3852	10,50	2	4	31,03	
ИТОГО	36696	100				

6. Далее по результатам строится кривая ABC-анализа.

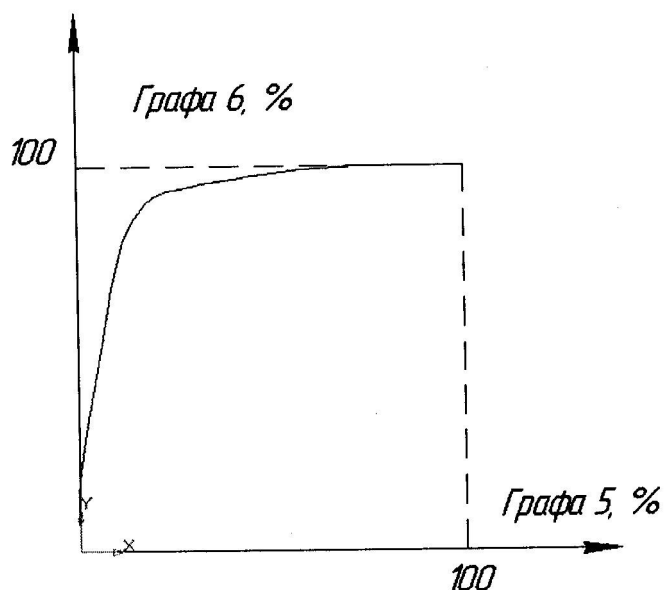
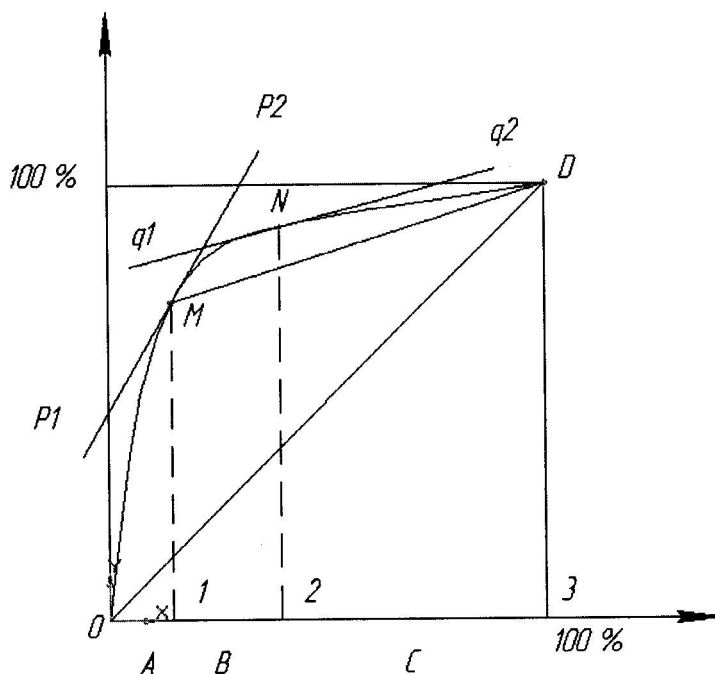


Рисунок 28 – Кривая ABC-анализа.

7. Кривая ABC-анализа позволяет графическим способом определить процентное соотношение долей в ассортименте и в реализации (рисунок 29).

Доля реализации по позициям в общей реализации, исчисленная нарастающим шагом, % (графа 6, табл.3)



Позиции ассортимента, выстроенные в порядке убывания доли в общей реализации (графа 5, табл.3)

Рисунок 29 – Алгоритм определения групп ассортимента.

Алгоритм определения групп А, В и С ассортимента фирмы состоит в следующем.

На рисунке 29, где построена ABC-кривая, проводится диагональ квадрата OD. Параллельно этой диагонали к ABC-кривой проводится касательная P₁P₂. В точке касания М устанавливается перпендикуляр к оси абсцисс. Этим самым на оси абсцисс выделяется отрезок 0-1, соответствующий первой выделенной группе А ассортимента.

Далее из точки М проводится прямая MD и параллельно этой прямой к ABC-кривой вновь строится касательная q₁q₂. Из точки N касания опускается перпендикуляр на ось абсцисс – полученный отрезок оси 1-2 определяет группу В ассортимента. Отрезок 2-3 оси абсцисс соответствует группе С ассортимента.

Таким образом, все три группы ассортимента являются выделенными. Результат этой работы целесообразно занести в графу 7 таблицы 57, показав тем самым какие именно продукты (или товары) входят к группы А, В и С.

7.3. Дифференцирование ассортимента компании по XYZ-методу

Проведённый ABC-анализ позволил дифференцировать продукты компании на три группы А, В и С по доли в реализации.

Применение XYZ-анализа позволяет разделить весь ассортимент компании по признаку стабильности спроса.

Необходимо отметить, что чем стабильнее спрос, тем меньше ошибки прогнозирования, ниже потребность в страховых запасах, легче планирование движения продукта.

Признаком, на основе которого конкретную позицию ассортимента относят к группе Х, Y или Z, является коэффициент вариации спроса по этой позиции.

Методические указания.

1. Рассчитать коэффициенты вариации спроса по отдельным позициям ассортимента по формуле (28):

$$V = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\chi_i - \bar{\chi})^2}}{\bar{\chi}} \times 100\%, \quad (28)$$

где χ_i – значение спроса по оцениваемой позиции за i-ый квартал;

$\bar{\chi}$ – среднеквартальное значение спроса по оцениваемой позиции;

n – число кварталов, за которое произведена оценка.

Результаты заносятся в таблицу 58.

2. Выстроить ассортиментные позиции в порядке возрастания значения коэффициента вариации спроса. Результаты представить в таблицах 58-59.

Таблица 58 – Определение коэффициента вариации спроса.

Наименование продукта	Реализация, тыс. руб.						Дисперсия	СКО	Коэффициент вариации спроса
	За год	За квартал				Средняя за квартал	$\frac{\sum_{i=1}^4 (\chi_i - \bar{\chi})^2}{4}$	$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 (\chi_i - \bar{\chi})^2}{4}}$	
		I	II	III	IV				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Батончик «Марс»	1788	380	475	400	533	447	3719,5	61,0	13,6
Батончик «Милки Уэй»	648	120	185	220	123	162	1794,5	42,2	26,1

Таблица 59 – Дифференцирование ассортимента по группам.

Наименование продукта	Кэф. вариации V (ось Y)	№ строки упоряд. списка	Количество позиций ассортимента упоряд. списка нараст. итогом в % (ось OX)	Группа X, Y, Z
1	2	3	4	5
Шоколад «Российский»	1,8	1	2	X
«Сникерс»	2,1	2	4	X

3. Средствами Microsoft Excel построить кривую XYZ-анализа (рисунок 30).

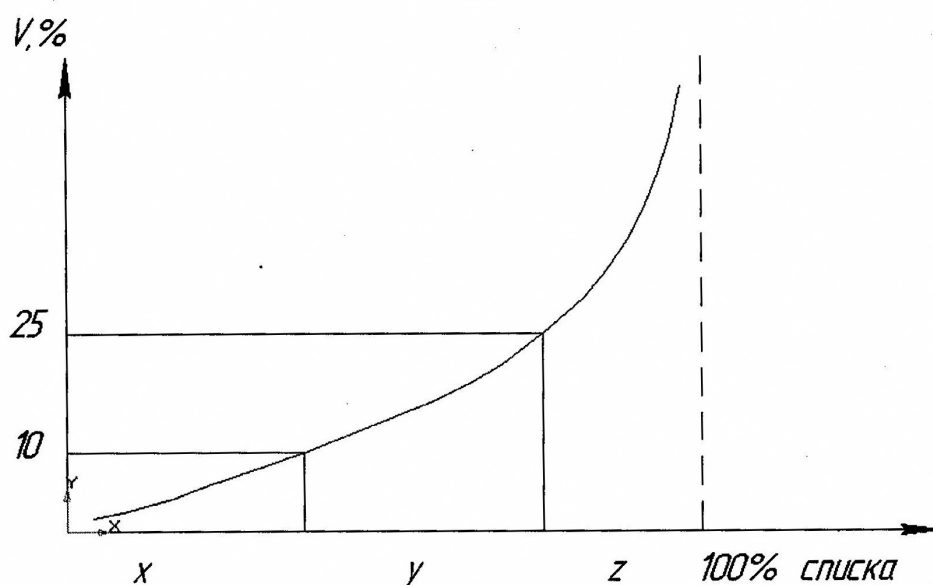


Рисунок 30 – Кривая коэффициента вариации.

4. Разделить анализируемый ассортимент на группы X, Y, Z.

Предлагаемый алгоритм деления ассортимента на группы:

группа X – при $0 \leq V < 10\%$,

группа Y – при $10\% \leq V < 25\%$,

группа Z – при $25\% \leq V < \infty$.

7.4. Построение матрицы ABC – XYZ-анализа

Методические указания.

Матрица ABC – XYZ-анализа строится по следующей схеме (рисунок 31).

AX	AY	AZ
BX	BY	BZ
CX	CY	CZ

Рисунок 31 – Матрица ABC – XYZ-анализа.

В ячейки матрицы вписываются продукты или товары, либо их номера по первичному списку – №№ позиций из таблицы 60.

Например, в ячейку AX вписываются номера продуктов, вошедших в группу A при выполнении ABC-анализа и в группу X при выполнении XYZ-анализа.

Что даёт распределение всего ассортимента продуктов по ячейкам матрицы ABC-XYZ-анализа?

Например, для товарных позиций AX, AY, AZ (первая строка матрицы) следует выбирать индивидуальные технологии управления запасами. Очевидно для позиций, входящих в группу AX, следует рассчитать оптимальный размер заказа и рассмотреть возможность применения технологии доставки «точно в срок».

Дело в том, что по проведённому ABC-анализу в группу A попадают те позиции из анализируемого ассортимента, которые имеют большой процент реализации в году (т.е. большую долю в реализации). С другой стороны XYZ-анализ показывает, что в группу X попадают именно те позиции, стабильность спроса которых достаточно велика, что подтверждается относительно малой величиной коэффициента вариации спроса.

Позиции, входящие в группу AZ, наоборот следует контролировать ежедневно, т.к. доля в годовой реализации этих продуктов остаётся достаточно высокой, а коэффициент вариации спроса также достаточно велик. Это говорит о нестабильности спроса на данные ассортиментные позиции.

Управление запасами по позициям, входящим в группу ВХ, ВУ, ВЗ, может осуществляться как по одинаковым, так и по индивидуальным технологиям (как по срокам планирования, так и по способам доставки).

7.5. Определение величины снижения затрат на содержание запасов на основе АСВ-анализа

Методические указания.

1. Вначале необходимо определить величину затрат на содержание запасов по традиционной схеме, т.е. при норме среднего запаса в 20 суток. Эта величина будет равна:

$$C_{\text{хран}}^0 = Z_{\text{ср}} \cdot Q_{\text{одн.одн.}} \cdot M, \quad (29)$$

где $Z_{\text{ср}}$ – норма среднего запаса в сутках;

$Q_{\text{одн.одн.}}$ – однодневная реализация на рассматриваемой фирме, равна:

$$Q_{\text{одн.одн.}} = \frac{Q_{\text{год.реализ.}}}{330}; \quad (30)$$

величина M – доля затрат на хранение в стоимости среднего запаса (принимается $M=0,3$).

Таким образом, величина $C_{\text{хран}}^0$ определяет затраты фирмы на хранение всего имеющегося запаса по традиционной схеме хранения.

2. Далее определяются затраты на содержание запасов по группам А, В и С ассортимента.

Для группы А получим:

$$C_{\text{хран}}^A = Z_{\text{ср}}^A \cdot Q_{\text{одн.одн.}}^A \cdot M, \quad (30)$$

где $Z_{\text{ср}}^A = 10$ суток;

$$Q_{\text{одн.одн.}}^A = \frac{Q_{\text{год.реализ.}}^A}{330}. \quad (31)$$

Здесь $Q_{\text{год.реализ.}}^A$ – годовая реализация продуктов или товаров группы А исходного ассортимента фирмы.

Аналогично определяются затраты на содержание запасов по группам В и С (32):

$$C_{\text{хран}}^B = Z_{\text{ср}}^B \cdot Q_{\text{одн.одн.}}^B \cdot M, \quad (32)$$

где $Z_{\text{ср}}^B = 20$ суток;

$$Q_{\text{одн.одн.}}^B = \frac{Q_{\text{год.реализ.}}^B}{330}; \quad (33)$$

$$C_{\text{хран}}^C = Z_{\text{ср}}^C \cdot Q_{\text{одн.одн.}}^C \cdot M, \quad (34)$$

где $3_{cp}^C = 30$ суток;

$$Q_{однодн}^C = \frac{Q_{год. реализ.}^C}{330}. \quad (35)$$

Годовая экономия финансовых средств в результате применения ABC-анализа ассортимента фирмы определяется следующим соотношением:

$$\Delta C_{хран} = C_{хран}^0 - (C_{хран}^A + C_{хран}^B + C_{хран}^C). \quad (36)$$

CX, CY, CZ может осуществиться на более длительный период, например, на квартал, с еженедельной (или ежемесячной) проверкой наличия запаса на складе.

Таблица 60 – Исходные данные для проведения ABC-XYZ-анализа (тыс. руб.)

№	Наименование продукта	Годовая реализация продукта	Реализация за квартал			
			1 квартал	2 квартал	3 квартал	4 квартал
1	2	3	4	5	6	7
1	Батончик «Марс»	1788	380	475	400	533
2	Батончик «Милки Уэй»	648	120	185	220	123
3	Батончик «Несквик»	780	115	200	195	270
4	Батончик «Твикс»	2460	650	590	600	620
5	«Баунти» молочный	1524	400	335	415	374
6	Жевательная резинка «Бумер»	696	215	141	180	160
7	Жевательная резинка «Дирол»	3120	650	800	750	920
8	Жевательная резинка «Минтон»	348	80	70	95	103
9	Жевательная резинка «Стиморол»	1020	200	300	200	320
10	Жевательная резинка «Супер»	516	120	150	120	126
11	Изюм	12	1	4	3	4
12	Инжир	36	9	10	10	7
13	Кетчуп «Болгарский»	228	55	60	48	65
14	Кетчуп «Монарх»	96	20	15	31	30
15	«Киндер сюрприз»	144	30	35	50	29
16	Кофе «Арабика» молотый	1140	280	270	275	315
17	Кофе растворимый «Нескафе голд»	2052	530	520	500	502
18	Кофе растворимый «Нескафе классик»	7536	1790	1900	1880	1966
19	Кукурузные хлопья с сахаром	180	50	39	45	46
20	Лапша «Доширак»	936	190	260	200	286
21	Миндаль в шоколаде	120	32	41	20	27
22	Мюсли	288	65	71	75	77
23	Рис длинный	852	230	220	220	182
24	Рис круглый	468	70	130	110	158
25	Сахар-песок фасованный	1308	348	330	31-	320
26	«Сникерс»	3852	992	970	940	950
27	Суп гуляш мгновенного приготовления	24	4	7	6	7
28	Торт вафельный	60	18	21	11	10

1	2	3	4	5	6	7
29	Чай «Ахмад»	204	45	51	50	58
30	Чай индийский	48	10	14	12	12
31	«Чупа Чупс»	192	45	50	43	54
32	Шоколад «Алёнка»	552	140	138	145	129
33	Шоколад «Альпен голд» с орехами и изюмом	240	45	72	69	54
34	Шоколад «Вдохновение»	132	30	35	31	36
35	Шоколад «Восторг»	108	26	20	32	30
36	Шоколад «Колокольня» пористый	12	4	2	4	2
37	Шоколад «Кофе с молоком»	168	40	35	50	43
38	Шоколад «Мишка косолапый»	264	79	70	70	45
39	Шоколад «Несквик»	84	18	21	22	23
40	Шоколад «Нестле классик»	396	40	120	80	156
41	Шоколад «Путешествие»	60	12	10	23	15
42	Шоколад «Ретро»	312	72	68	79	93
43	Шоколад «Российский»	612	149	156	155	152
44	Шоколад «Российский» молочный	432	100	120	120	92
45	Шоколад «Сказки Пушкина»	144	30	40	39	35
46	Шоколад «Сударушка»	12	2	2	5	3
47	Шоколад «Воздушный» белый пористый	12	2	0	4	6
48	Шоколад с арахисом	36	6	12	14	4
49	Шоколад с кокосом	72	15	14	22	21
50	Шоколадный напиток «Несквик»	373	90	100	110	72
ИТОГО		36696				

Таблица 61 – Исходные данные для проведения ABC-XYZ-анализа (тыс. руб.)

№	Наименование продукта	Годовая реализация продукта	Реализация за квартал			
			1 квартал	2 квартал	3 квартал	4 квартал
1	2	3	4	5	6	7
1	Алфавитная книжка А5, STAFF	233	134	23	64	12
2	Бизнес-органайзер А5, CENTRUM	152	12	54	76	10
3	Визитница Protege “Etude”	13	4	0	5	4
4	Блокнот А7+, 40 л., клетка, Хатбер	198	76	23	65	34
5	Бумага с клеевым краем 38x50 мм, НОРАХ	835	98	345	349	43
6	Бумага А3, бел., СНЕГУРОЧКА 80 г/м, 500 л.	5314	1767	990	879	1678
7	Бумага А3, бел., SVETOCOPY 80 г/м, 500 л.	8164	1946	5448	333	437
8	Бумага А4, бел., SVETOCOPY 80 г/м, 500 л.	4434	767	988	1765	914
9	Бумага А4, бел., СНЕГУРОЧКА 80 г/м, 500 л.	4775	857	934	2001	983
10	Бумага копировательная А4, 100 л., синяя	53	12	5	23	13
11	Ватман А1, 200 г/кв.м., «Гознак»	350	76	109	65	100
12	Доска магнитно-маркерная 90x180 см, PROFF	24	6	9	3	6
13	Флипчарт 72*103 см, LAMARK на роликах	10	3	0	6	1
14	Кнопки 12мм, 100 шт., PROFF	186	56	34	77	19
15	Скрепки 33мм, 500 шт., CENTRUM	179	34	93	12	40

1	2	3	4	5	6	7
16	Карандаш механич. 0,5 мм, PILOT "Better"	947	139	179	229	400
17	Карандаш механич. 0,5 мм, PILOT "Super Grip"	885	200	64	184	437
18	Карандаш ч/г CENTRUM "Neon", HB	7688	2554	1545	1940	1649
19	Карандаш ч/г КОН-I-NOOR "Blacksun", HB	7688	2554	1545	1940	1649
20	Клей ПВА 65 г. «Капля»	2600	876	348	544	832
21	Клей канцелярский 110г.	3387	1003	944	456	984
22	Клей-карандаш 09г., BRAUBERG	2264	764	545	334	621
23	Клей-карандаш 10г., LACO	2015	677	548	447	343
24	Корректирующая ручка LAMARK, 9мл	1052	543	145	124	240
25	Корр. жидкость+разбавитель CENTRUM	2671	764	598	432	877
26	Маркер перманентный SCHneider, чёрный	285	87	45	99	54
27	Маркер текстовый CENTROPEN, жёлтый	2715	907	443	876	489
28	Дырокол Erich Krause на 70 листов	2097	749	696	529	123
29	Дырокол LAMARK Cosmic на 40 л с линейкой	4659	645	613	1056	2345
30	Степлер №10 CENTRUM "Mini" на 5л	2423	342	765	562	754
31	Степлер №10 LACO на 12л, синий	1632	643	642	234	113
32	Скобы для степлера 24/6 LACO, 1000 шт.	2380	500	950	550	380
33	Нож канцелярский	156	59	38	34	25
34	Ножницы MAPED Universal, 17см	142	38	57	25	22
35	Ножницы CENTRUM, 25см, с резин. вставкой	213	56	56	23	78
36	Обложка для тетради	1407	200	904	70	233
37	Скоросшиватель картонный РИНГО, 30мм	230	44	76	13	97
38	Папка-регистратор РИНГО, А4, 7,5 см, синяя	59	15	20	18	6
39	Папка на 20 вкладышей PROFF	31	4	8	11	8
40	Файл А4, ESSELTE, гладкий	2200	1000	200	600	400
41	Ручка ZEBRA, автоматическая	213	39	91	38	45
42	Ручка гелевая CROWN, 0,7 мм	231	31	67	33	100
43	Ручка капиллярная PILOT, 0,5 мм, синяя	34	11	9	8	6
44	Ручка шариковая CORVINA-51 синяя	10221	2009	2438	4005	1769
45	Тетрадь А5, 24л, клетка, цв. обложка, скрепка	2692	654	456	900	682
46	Тетрадь А5, 48л, клетка, HATBER «Времена года»	2611	754	437	877	543
47	Цветная бумага А4, 8 цв., 16л, ПИФАГОР	88	15	7	50	16
48	Калькулятор	59	9	21	19	10
49	Ручка шариковая CORVINA-51 чёрная	2717	495	859	763	600
50	Линейка прозрачная, 25 см	110	22	15	33	40
ИТОГО		92813				

Таблица 62 – Исходные данные для проведения ABC-XYZ-анализа (тыс. руб.)

№	Наименование продукта	Годовая реализация продукта	Реализация за квартал			
			1 квартал	2 квартал	3 квартал	4 квартал
1	2	3	4	5	6	7
1	Кирпич лицевой одинарный силикатный	13128	2925	3510	3276	3417

1	2	3	4	5	6	7
2	Цемент М-500	1814	404	485	453	472
3	Скотч упаковочный	3535	788	954	882	920
4	«Ротбанд» (штукатурка) 30 кг.	18233	4063	4875	4550	4745
5	Лак паркетный матовый	254	57	68	63	66
6	Камень двойной рифлёный	6396	1425	1710	1596	1665
7	Пена монтажная	4686	1044	1253	1169	1220
8	Клей ПВА «Строительный»	1145	255	306	286	298
9	Клей для потолочных панелей	1018	227	272	254	265
10	Сурик железный ГОСТ 20 кг	719	160	192	180	187
11	Кирпич огнеупорный шамотный	495	110	132	124	129
12	Ацетон 8 кг ТЕКС	120	27	32	30	31
13	Перлфикс (клей для ГКЛ)	512	114	137	128	133
14	Плитонит ГТ Штукатурка (белый)	3654	811	977	912	951
15	Краска в/д моющаяся супербелая «Профи»	2705	603	723	675	704
16	Грунтовка проникающая «Оптимум»	2364	527	632	590	615
17	Сухая засыпка для ГВЛ	910	203	243	227	237
18	Герметик акриловый	2043	455	546	510	532
19	Краска в/д интерьера «Универсал»	2768	617	740	691	720
20	Уайт-спирит	6897	1537	1844	1721	1795
21	Колей для напольных покрытий	842	188	225	210	219
22	Минеральная вата ISOVER	674	150	180	168	176
23	Грунтовка антикоррозийная ГФ-021 серая	8764	1953	2343	2187	2281
24	Лак паркетный глянцевый	11423	2545	3054	2851	2973
25	Краска в/д потолочная «Эконом»	5443	1213	1455	1358	1417
26	Эмаль ПФ-266 для пола глянцевая	3647	813	975	910	949
27	Краска в/д для стен и потолка «Эконом»	1213	270	324	303	316
28	Кирпич полнотелый Гжель	618	138	165	154	161
29	Эмаль алкидная белая для радиаторов	1291	288	345	322	336
30	Клей для стеклообоев «Стандарт»	4321	963	1155	1078	1125
31	Плитонит В+	1291	288	345	322	336
32	Плитонит-К (белая-супер)	983	219	263	245	256
33	Растворитель Скипидар	1141	254	305	285	297
34	Плитонит В	1522	339	407	380	396
35	Блок (200х300х600) газосиликат Саратов	703	157	188	175	183
36	Шпаклёвка фасадная акриловая	1893	422	506	472	493
37	Минеральная плита Лайт Баттс	708	158	189	177	184
38	Растворитель ТЕКС	1190	265	318	297	310
39	Кирпич крупноформатный 10,8 NF Самара	1683	375	450	420	438
40	Креп (19мм х 50 м)	759	169	203	186	198
41	Унифлот (шпаклёвка) 25 кг	120	27	32	30	31
42	Грунтовка влагозащитная «Профи»	4208	938	1125	1050	1095
43	Олифа «Оксоль»	652	145	174	163	170
44	Tikkurila Миранол эмаль базис А глянец	1006	224	269	251	262
45	Флизинклебер (плиточный клей) 25 кг	4769	1063	1275	1190	1241
46	Плитонит А	1235	275	330	308	322
47	Паста колеровочная	1040	232	278	259	271
48	Очиститель пены	3048	679	815	761	793

Продолжение таблицы 62

1	2	3	4	5	6	7
49	Ацетон 4 кг ТЕКС	759	169	203	189	198
50	Эмаль алкидная основа А глянцевая 9 л	11592	2583	3099	2893	3017
ИТОГО		151934				

8. Распределение парка воздушных судов авиакомпании на заданной сети авиалиний

8.1 Постановка задачи

Пусть в аэропорту отправления имеется авиакомпания, специализирующаяся на грузовых воздушных перевозках, в самолётном парке содержатся R типов авиалайнеров. Разнотипные самолёты, обладая различными эксплуатационными характеристиками и разной эксплуатационной скоростью, могут доставлять по воздуху любой из M видов грузов в каждый N аэропорт назначения.

Вводятся следующие величины, которые предполагаются известными:

α_k - количество авиалайнеров k -го типа в авиакомпании ($k=1, \dots, R$), штук;

q_{ij} - количество i -го груза, которое подлежит перевозке в j -ый аэропорт назначения ($i=1, \dots, M, j=1, \dots, N$), тонн;

d_k - известная грузоподъёмность самолёта k -го типа, тонн;

t_{jk} - время занятости авиалайнеров k -го типа при перевозке груза в j -ый аэропорт назначения, часы.

Неизвестная переменная задачи:

x_{ijk} - количество самолётов k -го типа из самолётного парка авиакомпании, занятых перевозкой i -го груза в j -ый аэропорт назначения, штук.

Формулируется следующая задача: определить, сколько авиалайнеров каждого типа из авиакомпании следует направить для полного удовлетворения спроса на воздушные грузовые перевозки при минимальных затратах самолёто-часов.

Математическая модель задачи

Найти минимум целевой функции (37):

$$F = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^R t_{jk} x_{ijk} \rightarrow \min \{x_{ijk}\} \quad (37)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N x_{ijk} \leq \alpha_k, \quad k = 1, \dots, R$$

и

$$\sum_{k=1}^R d_k x_{ijk} = q_{ij}, \quad x_{ijk} \geq 0. \quad (38)$$

Приведём данную задачу к стандартной задаче искусственным путём. Для этого умножим ограничения (38) на соответствующие величины грузоподъёмности d_k , то есть:

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N d_k x_{ijk} \leq d_k \alpha_k. \quad (39)$$

Заменим пару индексов (i, j) и k соответственно индексами λ и μ по следующим правилам (40):

$$\begin{aligned}\lambda &= i + M(j-1); \\ \mu &= k.\end{aligned}\tag{40}$$

Индекс λ принимает все целые значения от 1 до MN, аналогично индекс μ принимает все целые значения от 1 до R.

Введём для старых переменных следующие обозначения (41):

$$\begin{aligned}d_k x_{ijk} &= z_{\lambda\mu}, \\ t_{jk} &= \tau_{\lambda\mu}, \quad i=1, \dots, M, \\ d_k \alpha_k &= \beta_\mu, \\ q_{ij} &= g_\lambda.\end{aligned}\tag{41}$$

В новых обозначениях целевая функция и ограничения будут иметь следующий вид (42):

$$F_1 = \sum_{\lambda=1}^{MN} \sum_{\mu=1}^R \tau_{\lambda\mu} z_{\lambda\mu} \rightarrow \min \{z_{\lambda\mu}\}.\tag{42}$$

Ограничения:

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda=1}^{MN} z_{\lambda\mu} &\leq \beta_\mu, \quad \mu=1, \dots, R; \\ \sum_{\mu=1}^R z_{\lambda\mu} &= g_\lambda, \quad \lambda=1, \dots, MN, \quad z_{\lambda\mu} \geq 0.\end{aligned}\tag{43}$$

Итак, это стандартная транспортная задача размерностью (MN x R), которая решается методом целочисленного линейного программирования. По вычисленным компонентам оптимального плана $z_{\lambda\mu \text{ onm}}$ определяют составляющие решения исходной задачи x_{ijk} по формуле:

$$x_{ijk \text{ onm}} = \frac{z_{\lambda\mu \text{ onm}}}{d_k}.\tag{44}$$

При этом индексы i, j, k вычисляются следующим образом:

$$i = \begin{cases} M, & \text{если } \lambda \text{ кратно } M; \\ \text{остатку от деления } \lambda \text{ на } M, & \text{если } \lambda \text{ не кратно } M; \end{cases}\tag{45}$$

$$j = \begin{cases} \frac{\lambda}{M}, & \text{если } \lambda \text{ кратно } M; \\ \text{целой части } \left(\frac{\lambda}{M} + 1 \right), & \text{если } \lambda \text{ не кратно } M \end{cases};\tag{46}$$

$$k = \mu.\tag{47}$$

8.2 Пример решения транспортной задачи

Пусть в аэропорту отправления имеется авиакомпания, специализирующаяся на грузовых воздушных перевозках, в самолётном парке которой содержатся 5 типов авиалайнеров. Разнотипные самолёты, обладая различными эксплуатационными характеристиками и разной эксплуатационной скоростью, могут доставлять по воздуху любой из 2 видов грузов в каждый из 3 аэропортов назначения. ($R=5$, $M=2$, $N=3$). Данные, необходимые для расчёта времени занятости авиалайнеров представлены в таблице 63.

Таблица 63 – Тактико-технические характеристики ВС.

Тип самолёта	Крейсерская скорость, км/ч	Коммерческая грузоподъёмность, т
1. Ан-26	430	5,5
2. Ан-72	550	10,0
3. Ан-32	530	6,5
4. Ил-76ТД	850	40,0
5. Ан-124-100	825	150,0

Протяжённость воздушной линии до 1 аэропорта назначения, км.....1500

Протяжённость воздушной линии до 2 аэропорта назначения, км.....2200

Протяжённость воздушной линии до 3 аэропорта назначения, км.....1000

Алгоритм расчёта времени занятости авиалайнеров требует уточнения!

После чего будет точно найдено время занятости для каждого типа ВС по всем воздушным линиям.

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} & t_{35} \end{bmatrix}$$

Количество авиалайнеров различных типов в самолётном парке авиакомпании: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 4$, $\alpha_4 = 2$, $\alpha_5 = 1$.

Характеристики грузов представлены в таблице 64.

Таблица 64 – Характеристика грузов

Тип груза	Количество груза, которое подлежит перевозке в аэропорт назначения, тонн
1. Заводское оборудование	
q_{11}	60
q_{12}	80
q_{13}	120
2. Скоропортящиеся продукты	
q_{21}	30
q_{22}	12
q_{23}	25

Математическая модель

Найти минимум целевой функции:

$$F(t_{jk}, x_{ijk}) \rightarrow \min \{x_{ijk}\}, \quad (48)$$

где $F = t_{11}x_{111} + t_{12}x_{112} + t_{13}x_{113} + t_{14}x_{114} + t_{15}x_{115} +$

$$\begin{aligned} & t_{21}x_{121} + t_{22}x_{122} + t_{23}x_{123} + t_{24}x_{124} + t_{25}x_{125} + \\ & t_{31}x_{131} + t_{32}x_{132} + t_{33}x_{133} + t_{34}x_{134} + t_{35}x_{135} + \\ & t_{11}x_{211} + t_{12}x_{212} + t_{13}x_{213} + t_{14}x_{214} + t_{15}x_{215} + \\ & t_{21}x_{221} + t_{22}x_{222} + t_{23}x_{223} + t_{24}x_{224} + t_{25}x_{225} + \\ & t_{31}x_{231} + t_{32}x_{232} + t_{33}x_{233} + t_{34}x_{234} + t_{35}x_{235} \end{aligned} \quad (49)$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} x_{111} + x_{121} + x_{131} + x_{211} + x_{221} + x_{231} &\leq \alpha_1 \\ x_{112} + x_{122} + x_{132} + x_{212} + x_{222} + x_{232} &\leq \alpha_2 \\ x_{113} + x_{123} + x_{133} + x_{213} + x_{223} + x_{233} &\leq \alpha_3 \\ x_{114} + x_{124} + x_{134} + x_{214} + x_{224} + x_{234} &\leq \alpha_4 \\ x_{115} + x_{125} + x_{135} + x_{215} + x_{225} + x_{235} &\leq \alpha_5 \end{aligned} \quad (50)$$

и

$$\begin{aligned}
d_1x_{111} + d_2x_{112} + d_3x_{113} + d_4x_{114} + d_5x_{115} &= q_{11} \\
d_1x_{121} + d_2x_{122} + d_3x_{123} + d_4x_{124} + d_5x_{125} &= q_{12} \\
d_1x_{131} + d_2x_{132} + d_3x_{133} + d_4x_{134} + d_5x_{135} &= q_{13} \\
d_1x_{211} + d_2x_{212} + d_3x_{213} + d_4x_{214} + d_5x_{215} &= q_{21} \\
d_1x_{221} + d_2x_{222} + d_3x_{223} + d_4x_{224} + d_5x_{225} &= q_{22} \\
d_1x_{231} + d_2x_{232} + d_3x_{233} + d_4x_{234} + d_5x_{235} &= q_{23}
\end{aligned} \tag{51}$$

Приведём данную задачу к транспортной искусственным путём. Для этого умножим ограничения (50, 51) на соответствующие величины грузоподъёмности d_k , то есть:

$$\begin{aligned}
d_1x_{111} + d_1x_{121} + d_1x_{131} + d_1x_{211} + d_1x_{221} + d_1x_{231} &\leq d_1\alpha_1 \\
d_2x_{112} + d_2x_{122} + d_2x_{132} + d_2x_{212} + d_2x_{222} + d_2x_{232} &\leq d_2\alpha_2 \\
d_3x_{113} + d_3x_{123} + d_3x_{133} + d_3x_{213} + d_3x_{223} + d_3x_{233} &\leq d_3\alpha_3 \\
d_4x_{114} + d_4x_{124} + d_4x_{134} + d_4x_{214} + d_4x_{224} + d_4x_{234} &\leq d_4\alpha_4 \\
d_5x_{115} + d_5x_{125} + d_5x_{135} + d_5x_{215} + d_5x_{225} + d_5x_{235} &\leq d_5\alpha_5
\end{aligned} \tag{52}$$

Заменим пару индексов (i, j) и k соответственно индексами λ и μ по следующим правилам:

$$\begin{aligned}
\lambda &= i + 2(j - 1); \\
\mu &= k.
\end{aligned} \tag{53}$$

Индекс λ принимает все целые значения от 1 до 6, аналогично индекс μ принимает все целые значения от 1 до 6.

Введём для старых переменных следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
d_1x_{111} &= z_{11}, d_1x_{121} = z_{12}, d_1x_{131} = z_{13}, \dots, \\
q_{11} &= g_1, q_{21} = g_2, q_{12} = g_3, q_{22} = g_4, q_{13} = g_5. \\
\begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} & \tau_{14} & \tau_{15} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} & \tau_{24} & \tau_{25} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} & \tau_{34} & \tau_{35} \end{bmatrix} & \\
d_1\alpha_1 &= \beta_1, d_2\alpha_2 = \beta_2, d_3\alpha_3 = \beta_3, d_4\alpha_4 = \beta_4, d_5\alpha_5 = \beta_5.
\end{aligned} \tag{54}$$

В новых обозначениях целевая функция и ограничения будут иметь следующий вид:

$$\sum_{\lambda=1}^6 \sum_{\mu=1}^6 \tau_{\lambda\mu} z_{\lambda\mu} = \min \{ z_{\lambda\mu} \}. \tag{55}$$

Ограничения:

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda=1}^6 z_{\lambda\mu} &\leq \beta_{\mu}, \mu = 1, \dots, 6; \\
\sum_{\mu=1}^6 z_{\lambda\mu} &= g_{\lambda}, \lambda = 1, \dots, 6, z_{\lambda\mu} \geq 0.
\end{aligned} \tag{56}$$

Итак, это стандартная транспортная задача размерностью (6 x 6), матрица данных которой выглядит следующим образом (таблица 65).

Таблица 65 – Матрица исходных данных

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	B ₆	g_{λ}	Числовые данные
A ₁	τ_{11} Z ₁₁	τ_{12} Z ₁₂	τ_{13} Z ₁₃	τ_{14} Z ₁₄	τ_{15} Z ₁₅	τ_{16} Z ₁₆	g ₁	60
A ₂	τ_{11} Z ₂₁	τ_{12} Z ₂₂	τ_{13} Z ₂₃	τ_{14} Z ₂₄	τ_{15} Z ₂₅	τ_{16} Z ₂₆	g ₂	30
A ₃	τ_{21} Z ₃₁	τ_{22} Z ₃₂	τ_{23} Z ₃₃	τ_{24} Z ₃₄	τ_{25} Z ₃₅	τ_{26} Z ₃₆	g ₃	80
A ₄	τ_{21} Z ₄₁	τ_{22} Z ₄₂	τ_{23} Z ₄₃	τ_{24} Z ₄₄	τ_{25} Z ₄₅	τ_{26} Z ₄₆	g ₄	12
A ₅	τ_{31} Z ₅₁	τ_{32} Z ₅₂	τ_{33} Z ₅₃	τ_{34} Z ₅₄	τ_{35} Z ₅₅	τ_{36} Z ₅₆	g ₅	120
A ₆	τ_{31} Z ₆₁	τ_{32} Z ₆₂	τ_{33} Z ₆₃	τ_{34} Z ₆₄	τ_{35} Z ₆₅	τ_{36} Z ₆₆	g ₆	25
β_{μ}	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6		327
Числовые данные	40	11	20	26	80	150	327	БАЛАНС

8.3. Срок доставки груза воздушным транспортом

Таблица 66 – Исходные данные

Вид транспорта	Формула расчёта срока доставки
Воздушный	$T_B = t_{н.к.} + \frac{L}{V_g} + t_{доп}^B$

Таблица 67 – Исходные данные

Вид транспорта	Средняя дальность перевозки, км	Средняя скорость доставки грузов		Средний срок доставки грузов, сут
		км/ч	км/сут	
Воздушный	2031	450	10800	0,3

Используемые обозначения

$t_{н.к.}$ – время на начально-конечные операции (погрузка, выгрузка, руление самолёта и др.), ч., определяется следующей формулой:

$$t_{н.к.} = t_{погрузки} + t_{руления}^1 + t_{взл.} + t_{пос.} + t_{руления}^2 + t_{разгрузки}, \quad (57)$$

$$\text{где } t_{руления} = \frac{L_{рул.}}{V_{рул.}}, \quad (58)$$

где $L_{рул.}$ – длина руления ВС,

$V_{рул.}$ – скорость руления ВС по рулёжной дорожке,

1 – в аэропорту отправления,

2 – в аэропорту назначения.

Время занятости ИВПП

При взлёте ВС:

$$t_{взл} = t_{вырул} + t_{ст} + t_{разб} + t_{нв}, \quad (59)$$

где $t_{вырул}$ – время выруливания на исполнительный старт;

$t_{ст}$ – время установки ВС на старте и доведение тяги двигателей до взлётной;

$t_{разб}$ – время разбега ВС;

$t_{нв}$ – время разгона и набора установленной высоты.

При посадке ВС:

$$t_{пос} = t_{пл} + t_{проб} + t_{отрул}, \quad (60)$$

где $t_{пл}$ – время планирования ВС с высоты принятия решения до момента приземления;

$t_{проб}$ – время пробега ВС (от приземления до момента отруливания с оси ИВПП);

$t_{отрул}$ – время отруливания ВС за боковую границу ИВПП.

L – расстояние воздушной перевозки, км;

$t_{дон}^B$ – время на дополнительные операции на воздушном транспорте (время, затрачиваемое клиентурой на подвоз и вывоз грузов, оформление перевозочных документов и другие операции, не учитываемые на магистральном транспорте, сут.);

$V_э$ – эксплуатационная скорость, км/ч;

На воздушном транспорте эксплуатационная скорость определяется следующим способом:

$$V_{\dot{Y}} = V_p \pm U, \quad (61)$$

$$V_p = V_{kp} \frac{L}{L + \Delta t V_{kp}} \rightarrow \text{рейсовая скорость} - \text{среднее расстояние,}$$

пройденное самолётом в единицу времени (без учёта времени посадок в пути) в штиль,

где U – величина продольной составляющей ветра (для различных периодов времени года и направлений движения ветра может иметь различное значение);

V_{kp} – расстояние, пройденное в единицу времени при равномерном, прямолинейном горизонтальном полёте самолёта и работе двигателей на крейсерском режиме и расчётных высоте полёта и массе самолёта;

Δt – потери времени на маневрирование в районе аэропорта при взлёте и перед посадкой, а также на набор высоты и снижение по сравнению со случаем, если бы набор высоты и снижение производилось со скоростью относительно земли, равной V_{kp} .

P.S. В общем случае нужно учитывать ещё время задержки в промежуточных аэропортах и время на выполнение различных технических операций (заправки, опробование двигателей и др.) – $\Sigma t_{ocm.} + \Sigma t_{mex.onep.}$

Средняя продолжительность стоянки ВС.

$$T_{n(i)} = \rho_T t_T + \rho_o t_o + \rho_k t_k + \rho_i t_i, \quad (62)$$

где $\rho_T, \rho_o, \rho_k, \rho_i$ – удельный вес соответственно транзитных, обратных, конечных и начальных рейсов, обслуживаемых на перроне;

t_T, t_o, t_i, t_k – средняя продолжительность стоянки на перроне ВС, выполняющих соответственно транзитные, обратные, начальные и конечные рейсы.

Таблица 68 – Продолжительность стоянки ВС различных рейсов

Группа ВС (тип ВС)	Продолжительность стоянки ВС различных рейсов, ч			
	Транзитный	Обратный	Конечный	Начальный
I (Ил-62, Ил-96, Ил-76, Ил-86)	1,5	2,1	0,9	0,9
II (Ту-154, Ту-134, Як-42)	1,0	1,2	0,8	0,9
III-IV (Ан-24, Ан-28, Як-40, Л-410)	0,55	0,75	0,4	0,8

При отсутствии данных по удельному весу различных рейсов среднюю продолжительность стоянки на перроне принимают для ВС I группы равной 1,9 ч, II группы – 1,45 ч, III и IV групп – 1,0 ч.

Время, затрачиваемое пассажирами на поездку воздушным транспортом

$$\Sigma T = t_{T_1} + t_{O_1} + t_{\text{л}} + t_{O_2} + t_{T_2}, \quad (63)$$

где t_{T_1} – время транспортировки из населённого пункта в аэропорт;

t_{O_1} – время ожидания в аэропорту отправления;

$t_{\text{л}}$ – время полёта, включая остановки в промежуточных аэропортах;

t_{O_2} – время ожидания в аэропорту назначения;

t_{T_2} – время транспортировки из аэропорта в населённый пункт.

Данное время складывается из лётного и наземного. Наземное время в среднем составляет около 3-3,5 часов.

Таблица 69 – Техническая характеристика самолётов гражданской авиации Российской Федерации и иностранных самолётов

Тип самолёта	Максимальная взлётная масса, т	Максимальная коммерческая загрузка, т	Крейсерская скорость, км/ч	Максимальная практическая дальность полёта, км
1	2	3	4	5
Российские авиалайнеры (Пассажирские самолёты)				
Ту-154	90,0	20,0	900	5000
Ту-134	44,0	7,7	850	3200
Ту-134А	47,0	8,2	870	3600
Ту-204	94,6	21,0	850	3500
Ил-62	161,5	23,0	830	8800
Ил-62М	165,0	23,0	870	10500
Ил-86	206,0	42,0	950	5800
Ил-96-300	240,0	40,0	900	11000
Ил-114	22,7	7,0	500	1000
Як-42	52,0	14,5	820	1900
Superjet 100-95	42,5	12,2	840	2950
Ан-24	21,8	5,0	475	2500
Российские авиалайнеры (Грузовые самолёты)				
Ан-72	33,0	10,0	550	2700
Ан-124	405,0	150,0	850	16500
Ан-225	600,0	250,0	850	15000
Ил-76	157,0	40,0	850	4800
Иностранные авиалайнеры				
Boeing 747	369,9	62,9	910	13570
Boeing 757-200	115,7	26,0	935	7240
Boeing 767-200	143,0	40,2	914	6800
Boeing 777-200	247,0	68,5	905	13100
Boeing 787-8	228,0	60,0	910	14700
A320-300	73,5	16,6	903	5600
A330-300	230,0	45,9	880	10800
A340-300	275,0	50,9	890	13500
A380	560,0	66,4	900	15000

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гаджинский А. М. Практикум по логистике. М: ИВЦ «Маркетинг», 1999.
2. Гёттинг Б. Международная производственная кооперация в промышленности. Роль логистики в усилении конкурентоспособности хозяйственных структур. М: Дело, 2000.
3. Гончаров П. П. и др. Основы логистики: Учеб. пос. Оренбург: Изд. центра ОГАУ, 1995.
4. Гордон М. П., Карнаухов С. Б. Логистика товародвижения. М.: Центр экономики и маркетинга, 1998.
5. Григорьев Ю. П. Методологические основы совершенствования системы материально-технического обеспечения войск в условиях переходных процессов (логистический подход). СПб.: ВАТТ, 1999.
6. Дыбская В. В. Логистика складирования. М.: ГУ — ВШЭ, 1999.
7. Дыбская В. В. Управление складом в логистической системе. М.: КИА центр, 2000.
8. Елисеев Б. П. Воздушные перевозки. М.: ИТК «Дашков и К^о», 2011.
9. Жаворонков Е. Л., Щербаков А. И. Логистика в строительстве: Учеб. пос. Новосибирск: СГАПС, 1996.
10. Зайцев Е. П. Все для перевозок грузов. СПб.: Закон и бизнес, 1998.
11. Залманова М. Е. Логистика: Учеб. пос. Саратов: СГТУ, 1995.
12. Залманова М. Е., Новиков О. А., Семененко А. И. Производственно-коммерческая логистика: Учеб. пос. Саратов: СГТУ, 1995.
13. Захаров К. В., Цыганок А. В., Бочарников В. П., Захаров Ф. К. Логистика, эффективность и риски внешнеэкономических операций. Киев: ИНЭКС, 2000.
14. Зубков Г. С. и др. Торговая логистика. Учеб. пос. Ростов-на-Дону: РИЦ ун-та, 1997.
15. Инструменты рыночной экономики: Межвузовский научный сборник. Саратов: СТТУ, 2000.
16. Информационные проблемы транспортной логистики / Сб. материалов международного семинара по транспортной логистике. СПб; Хельсинки: Ассоциация «Северо-Запад», 1997.
17. Инютина К. В., Квашнин Б. С., Суслов О. В. Основы логистики. СПб.: СПбГУЭФ, 1999.
18. Калювников Б. П., Некрасов А. Г., Селиванов С. Н., Виноградов К. Н. Логистика: Учеб. пос. М.: Изд. Университета Российской академии образования, 2000.
19. Козлов В. К., Уваров С. А. Логистика фирмы. СПб.: СПбГУЭФ, 1998.
20. Козловский В. А., Козловская Э. А., Савруков Т. Н. Логистический менеджмент. СПб: Изд-во «Политехника», 2000.

21. Колесников С. Н. Стратегия бизнеса. Управление ресурсами и запасами. М.: Изд. консультационной компании «Статус-Кво 97», 1999.
22. Колобов А. А., Омельченко И. Н. Основы промышленной логистики. М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1998.
23. Концепция развития транспортно-логистической системы Северо-западного региона. СПб.: Ассоциация «Северо-Запад», 1997.
24. Костоглодов Д. Д. Макрологистические системы рыночной экономики. Ростов-на-Дону: Гос. акад. стр-ва, 1996.
25. Костоглодов Д. Д., Харисова Л. М. Распределительная логистика. Ростов-на-Дону: Экспертное бюро, 1997.
26. Костоглодов Д. Д., Саввиди И. И., Стаханов В. Н. Маркетинг и логистика фирмы. М: Экспертное бюро-М, Прибор, 2000.
27. Лаврова О. В. Материальные потоки в логистике: Конспект лекций. Саратов: СГТУ, 1995.
28. Лаврова О. В. Планирование межцеховых материальных потоков в логистике: Конспект лекций. Саратов: СГТУ, 1995.
29. Леншин И.А., Смоляков Ю.И. Логистика. Ч. I — II. М.: Машиностроение, 1996.
30. Линдере М. Р., Фирон Х. Е. Управление снабжением и запасами. Логистика / Пер. с англ. СПб.: Полигон, 1999.
31. Логистизация материальных и финансовых потоков экономики: Материалы Международной научно-практической конференции / Под ред. В. Л. Стаханова. Ростов-на-Дону: РГСУ, 1997.
32. Логистика в переходный период к рыночной экономике: Тезисы докладов на международной межвузовской конференции. Саратов: СГТУ, 1995.
33. Логистика и бизнес: Сб. материалов первой межотраслевой научно-методической и научно-практической конференции «Логистика в современных условиях развития экономики РФ». М: МГАДИ(ТУ), Брандес, 1997.
34. Логистика как форма оптимизации рыночных связей / Под ред. Л. С. Федорова. М.: Институт мировой экономики и международных отношений РАН, 1996.
35. Логистика: Учеб. для вузов / Под ред. проф. Б. А. Аникина. М.: ИНФРА-М, 2000.
36. Логистика: Учеб. пос. / Под ред. Б. А. Аникина. М.: ИНФРА-М, 1997.
37. Логистика: Учеб. пос. / Б. А. Аникин [др.]; под ред. Б. А. Аникина, Т. А. Родкиной. М.: Проспект, 2010.
38. Логистикоориентированное управление организационно-экономической устойчивостью промышленных предприятий в рыночной среде / И. Н. Омельченко, А. А. Колобов, А. Ю. Ермаков, А. В. Киреев; Под ред. А. А. Колобова. М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1997.
39. Логистическая организация капитального строительства / Под ред. В. Н. Стаханова. Ростов-на-Дону: РГСУ, 1998.

40. Логистические системы: Межвузовский научный сборник. Саратов: СГТУ, 1999.
41. Лукинский В. С., Бережной В. И., Бережная Е. В., Цвиринько И. А. Логистика автомобильного транспорта (Концепция, методы, модели) . М: Финансы и статистика, 2000.
42. Маркировка и идентификация: Сб. материалов: / Приложение к журналу «Логинфо». Вып. 2. М.: КИА центр, 1999.
43. Милославская С. В., Плужников К.И. Мультимодальные и интермодальные перевозки: Учеб. пос. М.: РосКонсульт, 2001.
44. Миротин Л. Б., Ташбаев Ы. Э. Логистика: Справочное и учебно-методическое пособие. Координационный Совет по логистике. Московский транспортный институт. М: КСЛ, 2001.
45. Миротин Л. Б., Ташбаев Ы. Э. Логистика: основные положения и понятия: Приложение к журналу «Логинфо». Вып. 1. М: КИА, Центр, 2001.
46. Миротин Л. Б., Курганов В. М. Международные автомобильные перевозки: Учеб. пос. для вузов. Тверь: ТТУ, 2000.
47. Миротин Л. Б., Ташбаев Ы. Э. Логистика для предпринимателя: Учеб. пос. для транспортных вузов. М.: ИНФРА-М, 2002.
48. Миротин Л. Б., Ташбаев Ы. Э., Порошина О. Г. Эффективная логистика. М.: ЭКЗАМЕН, 2002.
49. Михайлова О. И. Введение в логистику. Учеб. метод, пос. М: Маркетинг, 1999.
50. Мясникова Л. А. Логистика экономики среднего звена. СПб.: СПбГУЭиФ, 1997.
51. Мясникова Л. А. Мезологистика: информация и ожидания. СПб.: СПбГУЭиФ, 1998.
52. Нагловский С .Н. Экономика и надежность логистических контейнерных систем. Ростов-на-Дону: РГЭА, 1996.
53. Неруш Ю. М. Коммерческая логистика: Учеб. для вузов. М.: ЮНИТИ, 1997.
54. Неруш Ю. М. Логистика: Учеб. для вузов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000.
55. Никифоров В. С. Основы логистики на водном транспорте: Учеб. пос. Новосибирск: НГАВТ, 1995.
56. Новиков О. А., Нос В. А., Рейфе М. Е., Уваров С. А. Логистика: Учеб. пос. СПб.: СЗПИ, 1996.
57. Новиков О. А., Семенов А. И. Производственно-коммерческая логистика: Учеб. пос. Ч. 1-11. СПб.: СПбУЭиФ, 1993.
58. Новиков О.А., Уваров С.А. Коммерческая логистика: Учеб. пос. СПб: СПбУЭиФ, 1995.
59. Новиков О.А., Уваров С.А. Логистика: Учеб. пос. СПб.: «Бизнес-пресса», 1999.
60. Основы логистики: Учеб. пос. / Под ред. Л. Б. Миротина и В. И. Сергеева. М.: ИНФРА-М, 1999.

61. Основы логистики: Учебник для вузов / Под ред. В. Щербакова. СПб: Питер, 2009.
62. Палагин Ю. И. Логистика – планирование и управление материальными потоками: Учеб. пос. СПб: Политехника, 2009.
63. Парамонов М. Ю. Логистика биржевых потоков. СПб.: СПбУЭиФ, 1996.
64. Пилишенко А. Н. Логистика: практикум / Под ред. Н.К. Моисеевой. М.: МГИЭТ(ТУ), 1998.
65. Плоткин Б. К. Введение в коммерцию и коммерческую логистику: Учеб. пос. СПб.: СПбУЭиФ, 1996.
66. Плоткин Б.К. Основы логистики: Учеб. пос. Л.: ЛФЭИ, 1991.
67. Плоткин Б.К. Основы теории и практики логистики: Метод. указания. СПб.: СПбУЭиФ, 1996.
68. Пурлик В. М. Логистика торгово-посреднической деятельности. М: Высш. шк., 1995.
69. Пурлик В. М. Рынок инвестиционных товаров и логистика. М.: Межд. универ. бизнеса и управления, 1997.
70. Рейфе М. Е. Организация развития логистической деятельности на оптовом рынке. СПб.: СПбУЭиФ, 1996.
71. Родников А. Н. Логистика: Терминологический словарь. М.: Экономика, 1995.
72. Родников А. Н. Логистика: Терминологический словарь. 2-е изд. М.: ИНФРА-М, 2000.
73. Русалева А. Ю. Основы логистики. Новосибирск: НГАЭУ, 1996.
74. Рыжова О. А. Организация материальных потоков в «толкающих» и «тянущих» системах производства: Конспект лекций. Саратов: СГТУ, 1995.
75. Саркисов С.В. Управление логистикой: Учебное пособие. М.: ЗАО «Бизнес-школа» «Интел-Синтез», 2001.
76. Семененко А. И. Введение в теорию обоснования логистических решений (эффективность логистических систем и цепей): Учеб. пос. СПб.: СПбГУЭФ, 1999.
77. Семененко А. И. Логистика: словарь и библиография. Справоч. пособие. СПб.: СПбГУЭФ, 1999.
78. Семененко А. И. Предпринимательская логистика. СПб.: Политехника, 1997.
79. Семененко А. И., Сергеев В. И. Логистика. Основы теории: Учебник для вузов. СПб: Союз, 2001.
80. Семенов М., Трубшин К, Лойко В., Баранова Т. Автоматизированные информационные технологии в экономике М: МО «Финансы и статистика», 2000.
81. Сергеев В. И. Логистика: аналитический обзор. СПб: Общество «Знание», 1996.
82. Сергеев В. И. Логистика: Учеб. пос. СПб.: СПбГИЭА, 1995.

83. Сергеев В. И. Менеджмент в бизнес-логистике. М.: ФИЛИНЪ, 1997.
84. Сергеев В. И, Эльяшевич П. А. Формирование макрологистических систем. СПб.: Общество «Звание», 1997.
85. Сергеев В. И Логистика в бизнесе. Учеб.: ИНФРА-М, 2001.
86. Сердюкова Л. О. Транспортно-складская логистика цеха: Конспект лекций. Саратов: СГТУ, 1995.
87. Сивохина Н. П., Родинов В. Б., Горбунов Н. М. Логистика: Учеб. пос. М.: ООО «Издательство АСТ», ЗАО «РИК Русанова», 2000.
88. Сидоров И. И. Логистическая концепция управления промышленным предприятием. СПб.: СПбГИЭА, 1999.
89. Смехов АА. Основы транспортной логистики. М.: Транспорт, 1995.
90. Современный склад / Приложение к журналу «Логинфо». Вып. 1. М.: КИА центр, 1999.
91. Стаханов В. Н., Ивакин Е. К. Логистика в строительстве. Ростов-на-Дону: РГСУ, 1997.
92. Стаханов В. Н., Саввиди И. И., Костоглодов Д. Д. Маркетинг и логистика фирмы. Ростов-на-Дону: РГСУ, 1999.
93. Стаханов Д. В., Стаханов В. Н. Таможенная логистика. М.: Изд. «ПРИОР», 2000.
94. Стаханов В. Н., Струков Е. А., Тамбовцев С. Н. Промышленная логистика: Учеб. пос. Ростов-на-Дону: РГСУ, 1998.
95. Стаханов В. Н., Тамбовцев С. Н. Промышленная логистика: Учеб. пос. М.: ПРИОР, 2000.
96. Стаханов В. Н., Шеховцев Р. В. Торговая логистика: Учеб. пос. М.: ПРИОР, 2000.
97. Степанов В. И., Попов В. А. Основы логистики. М: Доброе слово, 2001.
98. Канчавели А. Д., Колобов А. А., Омельченко И.Н. и др. Стратегическое управление организационно-экономической устойчивости фирмы: Логистикоориентирование бизнеса. / Под ред. А. А. Колобова и И. Н. Омельченко. М: Изд-во МГТУ им Н.Э. Баумана, 2001.
99. Теория и практика логистики экономики переходного периода: Материалы региональной научно-практической конференции / Отв. ред. В.Н.Стаханов. Ростов-на-Дону: РГСУ, 1998.
100. Транспортная логистика и логистика транспорта: Межвузовский научный сборник. Саратов: СП У, 1996.
101. Транспортная логистика: Учеб. пос. / Под ред. Л. Б. Миротина. М.: МГАДИ(ТУ), 1996.
102. Транспортная логистика: Учеб. пос. / Под ред. Л. Б. Миротина. М.: Экзамен, 2002.
103. Уваров С. А. Логистика. СПб.: ЗАО «Инвестиции в науку и производство», 1996.

104. Украинцев В.Б. Конкуренция и логистика. М.: Экспертное бюро, 1999.
105. Федько В. П., Альбеков А. У., Комарова А. И. Инфраструктура муниципальных образований: логистический аспект. Ростов-на-Дону: РГЭА, 1999.
106. Федько В. П., Федько Н. Г. Инфраструктура товарного рынка: Учеб. пос. Ростов-на-Дону: Феникс, 2000.
107. Чернышев М. А. Муниципальная экономика: логистическая концепция. Ростов-на-Дону: РГСУ, 1998.
108. Чернышев М. А., Новиков О. А. Инфраструктура мегаполиса: логистический подход. Ростов-на-Дону: РГУ, 1995.
109. Шевалье Ж., Вань Т. Логистика. Новые принципы менеджмента и конкурентоспособности / Пер. с фр. М.: Консалтбанкир, 1997.
110. Щербаков В. В., Уваров С. А. Современные системы хозяйственных связей и логистика. СПб.: СПбГУЭиФ, 1997.